

大阪大学 1985 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 k を正数とし、 $f(x) = x^3 - 10x^2 + kx$ とする。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の実数解をもち、それらの解が互いに 1 以上離れているための k の条件を求めよ。
 (2) 曲線 $y = f(x)$ がある点で x 軸に接するとき、 k の値および曲線 $y = f(x)$ と x 軸とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = x(x^2 - 10x + k)$ と因数分解し、2 次方程式の 2 根を $5-s, 5+s$ と置く。3 個の実数解と距離条件は、 $0, 5-s, 5+s$ の間隔を直接調べればよい。(2) は x 軸に接することを重解条件に直し、 $k = 25$ のときの正の部分を積分して面積を出す。

【解答】

(1) $f(x) = x(x^2 - 10x + k)$ である。 $k > 0$ なので $x = 0$ は単純な解である。残りの 2 解は $x^2 - 10x + k = 0$ の解である。この 2 解を $5-s, 5+s$ とおくと、解と係数の関係から $(5-s) + (5+s) = 10$ であり、また $(5-s)(5+s) = 25 - s^2 = k$ である。したがって $s = \sqrt{25 - k}$ と見てよい。

方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の実数解をもつには、2 次方程式が相異なる実数解をもち、しかも 0 と重ならないことが必要である。 $k > 0$ のもとでは $0 < k < 25$ なら $0 < 5-s < 5+s$ となり、3 解は $0, 5-s, 5+s$ である。

これらが互いに 1 以上離れている条件は $(5-s) - 0 \geq 1, (5+s) - (5-s) \geq 1$ である。すなわち $5-s \geq 1, 2s \geq 1$ であり、 $\frac{1}{2} \leq s \leq 4$ を得る。 $k = 25 - s^2$ だから $25 - 4^2 \leq k \leq 25 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ となる。よって求める条件は $9 \leq k \leq \frac{99}{4}$ である。

(2)

曲線 $y = f(x)$ が x 軸に接することは、 $f(x) = 0$ が重解をもつことを意味する。 $k > 0$ なので $f'(0) = k \neq 0$ であり、 $x = 0$ は重解ではない。したがって $x^2 - 10x + k = 0$ が重解をもつ場合だけを考えればよい。

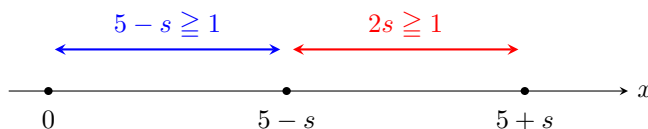
判別式を 0 とおくと $(-10)^2 - 4k = 0$ より $k = 25$ である。このとき $f(x) = x(x-5)^2$ であり、 $0 < x < 5$ では $f(x) > 0$ である。したがって、曲線と x 軸で囲まれる部分は $0 \leq x \leq 5$ にあり、その面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^5 x(x-5)^2 dx \\
 &= \int_0^5 (x^3 - 10x^2 + 25x) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{25x^2}{2} \right]_0^5 \\
 &= \frac{625}{4} - \frac{1250}{3} + \frac{625}{2} \\
 &= \frac{625}{12}
 \end{aligned}$$

である。

よって $k = 25, S = \frac{625}{12}$ である。

3 根の配置は次のようになる。



▶ 解法 2 (根の公式と接点条件)

【方針】

(1) は 2 次式の根を根の公式で直接表し、0 との距離と 2 根間の距離を不等式にする。(2) は接点の座標を r とし、 $f(r) = f'(r) = 0$ を連立して重解を直接決定する。

【解答】

(1)

$$f(x) = x(x^2 - 10x + k)$$

であり、2 次式の根は

$$\alpha = 5 - \sqrt{25 - k}, \quad \beta = 5 + \sqrt{25 - k}$$

である。3 個の実数解をもつには $0 < k < 25$ が必要で、このとき

$$0 < \alpha < \beta$$

となる。

3 根が互いに 1 以上離れる条件は

$$\alpha \geq 1, \quad \beta - \alpha \geq 1$$

である。したがって

$$5 - \sqrt{25 - k} \geq 1, \quad 2\sqrt{25 - k} \geq 1.$$

前者から $k \geq 9$ 、後者から $k \leq 99/4$ を得る。よって

$$9 \leq k \leq \frac{99}{4}$$

である。

(2) 接点の x 座標を r とする。 $k > 0$ より $f'(0) = k \neq 0$ だから $r \neq 0$ である。そこで

$$f(r) = 0, \quad f'(r) = 0$$

を用いると

$$r^2 - 10r + k = 0, \quad 3r^2 - 20r + k = 0.$$

両式の差から

$$2r^2 - 10r = 2r(r - 5) = 0$$

となり、 $r = 5$ である。これを戻して $k = 25$ を得る。このとき

$$f(x) = x(x - 5)^2$$

だから、囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 x(x - 5)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{25x^2}{2} \right]_0^5 \\ &= \frac{625}{12}. \end{aligned}$$

したがって $k = 25$ である。

【総評】 難易度 5、計算量 5、想定時間 15~22 分。3 根を $0, 5 - s, 5 + s$ と並べると、距離条件は隣り合う 2 間隔だけを調べればよい。(2) では「接する」を重解条件へ直し、 $x = 0$ は $k > 0$ のため重解でないことを明記する。面積では被積分関数が $[0, 5]$ で非負であることを確認する。根の公式による検算と連立条件による検算が一致する。

【第 2 問】

平面上の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

によって、ある直線 l が同じ直線 l にうつされるとき、2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ は実数解をもつことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 l 上の異なる 2 点を取り、その差ベクトルを調べる。1 次変換で l が同じ直線に移るなら、差ベクトルは再び l の方向に平行になる。つまりある実数 λ について $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ と書けるので、この λ が問題の 2 次方程式を満たすことを行列式で示す。

【解答】

与えられた 1 次変換の行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。

直線 l 上に異なる 2 点 P, Q を取る。 P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}, \vec{q}$ とすれば、 $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$ は l の方向ベクトルであり、 $\vec{v} \neq \vec{0}$ である。

条件より、 P が移った点も Q が移った点も同じ直線 l 上にある。したがって、移った後の差 $A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = A\vec{v}$ は、直線 l の方向に平行である。よって、ある実数 λ が存在して $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ と書ける。もし $A\vec{v} = \vec{0}$ であっても、これは $\lambda = 0$ とすれば含まれる。

ここで

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad ((r, s) \neq (0, 0))$$

とおく。上の式は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

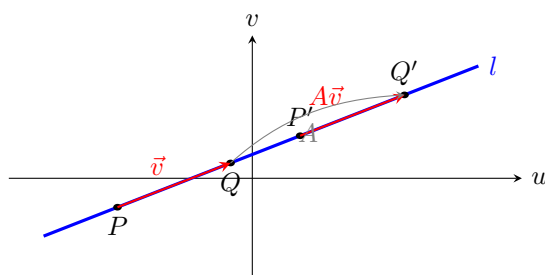
となる。 $(r, s) \neq (0, 0)$ であるから、この連立方程式が 0 でない解をもつためには

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = 0$$

でなければならない。左辺を展開すると $(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$ である。

したがって実数 λ が $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ を満たす。ゆえに、2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ は実数解をもつ。

差ベクトルを見る理由を図にすると次の通りである。点そのものの位置ではなく、同じ直線上の 2 点の差だけが直線 l の方向を表す。



▶ 解法 2 (方向の傾きで場合分け)

【方針】

不変な直線の方角を、非鉛直なら $(1, m)$ 、鉛直なら $(0, 1)$ と表す。移された方向が元の方角と平行になる条件から、問題の 2 次方程式の実数解を直接作る。

【解答】

直線 l の方向を考える。

まず l が鉛直でないとする。その方向ベクトルを

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

と書ける。直線 l が同じ直線に移るので、方向ベクトルの像

$$\begin{pmatrix} a + bm \\ c + dm \end{pmatrix}$$

は $(1, m)$ に平行である。したがって、ある実数 λ に対して

$$a + bm = \lambda, \quad c + dm = m\lambda$$

が成り立つ。

この実数 λ について

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc &= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= bm(a + bm - d) - bc \\ &= b\{bm^2 + (a - d)m - c\} = 0 \end{aligned}$$

である。最後の等号には $c + dm = m(a + bm)$ を用いた。よって λ は問題の 2 次方程式の実数解である。

次に l が鉛直なら、方向ベクトルは $(0, 1)$ である。その像 (b, d) も鉛直だから $b = 0$ である。このとき

$$x^2 - (a + d)x + ad = (x - a)(x - d)$$

となり、実数解 a, d をもつ。

以上より、どちらの場合にも与えられた 2 次方程式は実数解をもつ。

【総評】 難易度 5、計算量 3、想定時間 10～15 分。直線上の点の座標ではなく、異なる 2 点の差ベクトルを使うと位置の影響が消える。行列は問題文そのものが 1 次変換を行列で与えているため、この問題に限って使用している。別解では鉛直方向を落とさず場合分けすることが重要である。

【第 3 問】

xy 平面において、曲線 $y = x^2$ と正方形 $\{(x, y) : a \leq x \leq a + 1, b \leq y \leq b + 1\}$ が共通点をもつとき、点 (a, b) の存在する範囲を求め、これを図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

正方形が放物線と交わる条件を、 $[a, a + 1]$ における x^2 の値域と、縦方向の区間 $[b, b + 1]$ が交わる条件に直す。最小値は区間が 0 を含むかどうかで分かれ、最大値は端点の絶対値が大きい方で決まる。最後は b が下側境界と上側境界の間にある範囲として図示する。

【解答】

正方形と放物線 $y = x^2$ が共通点をもつことは、ある実数 x が存在して $a \leq x \leq a + 1$, $b \leq x^2 \leq b + 1$ を満たすことと同値である。

区間 $a \leq x \leq a + 1$ における x^2 の最小値を $m(a)$ 、最大値を $M(a)$ とする。この区間で x^2 が取りうる値全体は $m(a) \leq y \leq M(a)$ である。したがって縦方向の区間 $[b, b + 1]$ と交わる条件は $b \leq M(a)$ かつ $b + 1 \geq m(a)$ である。すなわち $m(a) - 1 \leq b \leq M(a)$ が必要十分条件である。

まず最小値を求める。区間 $[a, a + 1]$ がすべて 0 以下なら右端で最小、0 を含めば最小値は 0、すべて 0 以上なら左端で最小である。よって

$$m(a) = \begin{cases} (a + 1)^2 & (a \leq -1), \\ 0 & (-1 \leq a \leq 0), \\ a^2 & (0 \leq a) \end{cases}$$

である。

次に最大値を求める。 x^2 の最大値は、端点 a と $a + 1$ のうち絶対値が大きい方で決まる。 $|a| \geq |a + 1|$ は $a \leq -1/2$ と同値なので

$$M(a) = \begin{cases} a^2 & (a \leq -\frac{1}{2}), \\ (a + 1)^2 & (-\frac{1}{2} \leq a) \end{cases}$$

である。

したがって求める範囲は次の通りである。

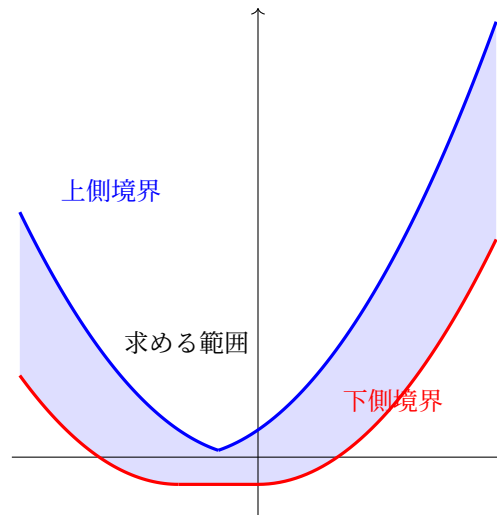
$$\begin{cases} (a + 1)^2 - 1 \leq b \leq a^2 & (a \leq -1), \\ -1 \leq b \leq a^2 & (-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}), \\ -1 \leq b \leq (a + 1)^2 & (-\frac{1}{2} \leq a \leq 0), \\ a^2 - 1 \leq b \leq (a + 1)^2 & (0 \leq a). \end{cases}$$

図示すると、上側の境界は

$$b = a^2 \quad (a \leq -\frac{1}{2}), \quad b = (a + 1)^2 \quad (a \geq -\frac{1}{2})$$

である。下側の境界は $b = (a + 1)^2 - 1$ ($a \leq -1$), $b = -1$ ($-1 \leq a \leq 0$), $b = a^2 - 1$ ($a \geq 0$) である。これらの境界を含め、その間を塗った部分が点 (a, b) の存在範囲である。

境界と求める範囲は次図の通りである。



▶ 解法 2 (正方形の左下頂点を掃引する)

【方針】

放物線上の点 (t, t^2) を 1 つ固定する。その点を含む単位正方形の左下頂点 (a, b) は長方形 $[t-1, t] \times [t^2-1, t^2]$ を動く。これを t で掃引し、上下の包絡線を求める。

【解答】

放物線上の点 (t, t^2) が単位正方形に含まれる条件は

$$t-1 \leq a \leq t, \quad t^2-1 \leq b \leq t^2$$

である。したがって、 t を固定すると左下頂点 (a, b) は

$$[t-1, t] \times [t^2-1, t^2]$$

という長方形を動く。求める範囲は、これらの長方形をすべて重ねた部分である。

a を固定すると、条件 $t-1 \leq a \leq t$ は

$$a \leq t \leq a+1$$

となる。したがって、その縦線上で可能な b は

$$\min_{a \leq t \leq a+1} t^2 - 1 \leq b \leq \max_{a \leq t \leq a+1} t^2$$

を満たす。

下側の包絡線は、区間 $[a, a+1]$ が 0 の左・0 を含む・0 の右のどこにあるかで

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 1 & (a \leq -1), \\ -1 & (-1 \leq a \leq 0), \\ a^2 - 1 & (0 \leq a) \end{cases}$$

となる。上側の包絡線は、 a と $a+1$ のうち絶対値の大きい端点で決まり、

$$\begin{cases} a^2 & (a \leq -1/2), \\ (a+1)^2 & (-1/2 \leq a) \end{cases}$$

となる。

よって求める範囲は

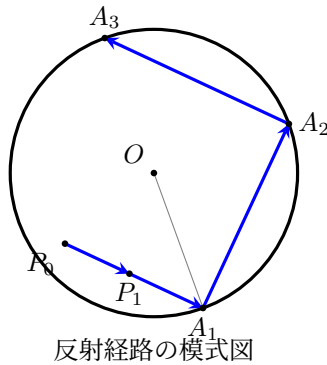
$$\begin{cases} (a+1)^2 - 1 \leq b \leq a^2 & (a \leq -1), \\ -1 \leq b \leq a^2 & (-1 \leq a \leq -1/2), \\ -1 \leq b \leq (a+1)^2 & (-1/2 \leq a \leq 0), \\ a^2 - 1 \leq b \leq (a+1)^2 & (0 \leq a) \end{cases}$$

であり、境界をすべて含む。

【総評】 難易度 6、計算量 3、想定時間 16～22 分。横区間 $[a, a+1]$ における x^2 の値域へ直すのが要点である。最小値の分岐点 $-1, 0$ と最大値の分岐点 $-1/2$ を混同しない。境界上でも共通点をもつので、すべて等号を含む。包絡線による別解と固定 a の値域計算で同じ 4 領域を確認した。

【第 4 問】

xy 平面における原点 O を中心とする半径 1 の円周 C は鏡になっているものとする。 C の内部に異なる 2 点 $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$ をとる。右図のように点 P_0 を出て点 P_1 を通り、 C 上の点 $A_1, A_2, A_3, \dots$ で反射をくり返しながら進む光を考える。ただし、この光は C の内部では一定の速さで直進し、 C に当たったときは反射の法則によって入射角と反射角が等しいように反射するものとする。たとえば、図の点 A_1 においては $\angle P_0A_1O = \angle OA_1A_2$ となる。このとき、次の問に答えよ。



反射経路の模式図

- (1) 点 P_0, P_1 を結ぶ直線と原点 O との距離 d を、点 P_0, P_1 の座標を用いて表せ。
- (2) この光がある時間後にふたたび線分 P_0P_1 上を点 P_0 から点 P_1 の向きに進んで行くための必要十分条件は、ある有理数 q が存在して $d = \cos(q\pi)$ を満たすことであることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

反射点を結ぶ弦は中心からの距離 d が一定で、中心角 2θ ずつ進む。元の有向弦へ戻る条件を $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$ と結び付ける。

【解答】

(1) 点 P_0P_1 を通る直線の方角ベクトルは $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ である。点 P_0 の位置ベクトルとこの方向ベクトルで作る平行四辺形の面積は $|x_0(y_1 - y_0) - y_0(x_1 - x_0)| = |x_0y_1 - y_0x_1|$ である。

一方、この面積は底辺の長さ $|P_0P_1|$ × 原点から直線 P_0P_1 までの距離でもある。したがって $d = \frac{|x_0y_1 - y_0x_1|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$ である。

(2) 点 P_0, P_1 は円の内部にあり、互いに異なるので、直線 P_0P_1 は円 C と 2 点で交わる。その 2 点を、光の進む向きに A_0, A_1 とする。問題文の最初の反射点は A_1 である。以後の反射点を $A_2, A_3, \dots$ とすれば、光の進路は弦 $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ の列として表される。

円の接線は半径に垂直である。したがって、反射の法則で入射角と反射角が等しいことは、点 A_i で半径 OA_i と弦 $A_{i-1}A_i, A_iA_{i+1}$ が作る角が等しいことと同じである。すると、三角形 $OA_{i-1}A_i$ と OA_iA_{i+1} はともに半径 1 を 2 辺にもつ二等辺三角形で、頂点 A_i における半径との角が等しい。よって対応する中心角も等しく、すべての弦 A_iA_{i+1} は原点から同じ距離にある。

初めの弦 A_0A_1 は直線 P_0P_1 上にあるので、その原点からの距離は d である。よってすべての弦 A_iA_{i+1} も原点から距離 d にある。

ここで $0 \leq d < 1$ であるから、ただ 1 つの θ が $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $d = \cos \theta$ を満たす。半径 1 の円で、中心から距離 d にある弦の中心角は 2θ である。したがって、反射点を円周上の向きに沿って見れば、点 A_i の偏角は毎回 2θ ずつ進む。

光がある時間後にふたたび線分 P_0P_1 上を P_0 から P_1 の向きに進むことは、ある正の整数 m について、弦 A_mA_{m+1} が初めの弦 A_0A_1 と同じ向きで一致することと同値である。偏角でいえば、これは $2m\theta = 2N\pi$ を満たす整数 N が存在する

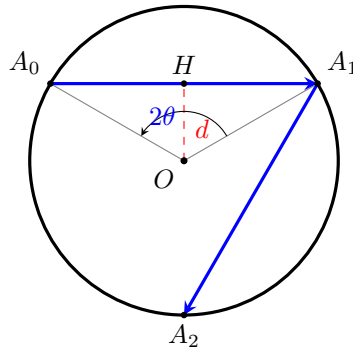
ことと同値である。すなわち $\frac{\theta}{\pi} = \frac{N}{m}$ が有理数であることと同値である。

したがって、光が元の向きで線分 P_0P_1 上を進むためには、ある有理数 q が存在して $\theta = q\pi$ すなわち $d = \cos(q\pi)$ でなければならない。

逆に、ある有理数 q について $d = \cos(q\pi)$ と書けるとする。 $d \geq 0$ なので、必要なら q を取り直して $0 < q \leq 1/2$ としてよい。 $q = N/m$ と表せば、 $\theta = q\pi$ について $2m\theta = 2N\pi$ が成り立つ。よって m 回分だけ弦を進めると、弦 A_mA_{m+1} は初めの弦 A_0A_1 と同じ向きで一致する。したがって光は再び線分 P_0P_1 上を P_0 から P_1 の向きに進む。

以上より、求める必要十分条件は ある有理数 q が存在して $d = \cos(q\pi)$ となることである。

各弦と中心の関係は次図のようになる。弦の中心角が毎回 2θ で一定であることが本質である。



▶ 解法 2 (円周上の回転として見る)

【方針】

反射点から次の反射点へ移る操作を、円周上で一定角 2θ だけ回す操作とみなす。元の有向弦へ戻ることと、この回転が有限回で恒等になることを結び付ける。

【解答】

(1) 直線 P_0P_1 の方程式は

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - x_0y_1 + y_0x_1 = 0$$

と書ける。したがって点と直線の距離公式から

$$d = \frac{|x_0y_1 - y_0x_1|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

である。

(2) 初めの進行方向に直線 P_0P_1 を延長し、円との交点を順に A_0, A_1 とする。中心から弦 A_0A_1 に下ろした垂線の足を H とし、

$$\theta = \angle HOA_1$$

とおく。直角三角形 OHA_1 で $OA_1 = 1$ 、 $OH = d$ だから

$$d = \cos \theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

反射の法則と、接線が半径に垂直であることから、連続する弦は各反射点の半径に対して等しい角をなす。したがって円周上では

$$A_i \mapsto A_{i+1}$$

が毎回同じ中心角 2θ の回転になる。

ある $m \geq 1$ の後に初めの有向弦と一致するための必要十分条件は、この回転を m 回行った角が 2π の整数倍になることである。すなわち、ある整数 N に対して

$$2m\theta = 2N\pi$$

となることである。これは

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{N}{m} \in \mathbb{Q}$$

と同値である。

よって、この条件が成り立つなら $q = \theta/\pi$ として

$$d = \cos(q\pi)$$

と書ける。逆に、ある有理数 q について $d = \cos(q\pi)$ なら、 $0 < \theta \leq \pi/2$ を満たす $\theta = \arccos d$ について θ/π も有理数になる。分母回だけ回転すれば有向弦が元に戻る。

したがって、求める必要十分条件は

$$\text{ある } q \in \mathbb{Q} \text{ が存在して } d = \cos(q\pi)$$

である。

【総評】 難易度 8、計算量 5、想定時間 28～40 分。(1) は平行四辺形の面積または点と直線の距離公式で確認できる。(2) は反射を弦の列に置き換え、中心から各弦までの距離と中心角が一定であることを示す。「同じ直線」だけでなく「 P_0 から P_1 の向き」まで戻るため、回転角は π ではなく 2π の整数倍を要求する。欠落していた原問題の右図は、条件に忠実な模式図として再構成した。