

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 1986 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

- (1) $\log_3 4$ は無理数であることを証明せよ.
- (2) a, b は無理数で, a^b が有理数であるような数の組 a, b を求めよ.

第 2 問

xy 平面内の曲線 $C : y = \frac{1}{x}, x > 0$ 上の相異なる 2 点 $P\left(a, \frac{1}{a}\right), Q\left(b, \frac{1}{b}\right)$ (ただし, $0 < a < b$) に対し, $R\left(b, \frac{1}{a}\right)$ とおく.

いま, 点 P, Q が, $\triangle PQR$ と $\triangle OPQ$ の面積の比が一定値 k , すなわち $\frac{\triangle PQR}{\triangle OPQ} = k$ であるように曲線 C 上を動くとき, 点 P, Q における曲線 C の接線の交点 S の軌跡を求めよ. ただし, O は原点である.

第 3 問

正の数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ が $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$ を満たしながら変わるとき

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_5$$

の最大値を，次の手順で求めよ．

- (1) $\alpha < 2\pi$ を満たす正の数 α を決める． $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ のとき， $\sin \theta_1 + \sin \theta_2$ の最大値を求めよ．
- (2) $\beta < 2\pi$ を満たす正の数 β を決める． $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \beta$ のとき， $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4$ の最大値を θ_5 で表せ．
- (3) $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_5$ の最大値を求めよ．

第 4 問

xyz 空間内に定点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ がある. いま点 P が yz 平面上の半円 $x = 0$, $y^2 + z^2 = 2$, $y \leq 0$ の上を動くとき, $\triangle PAB$ の周および内部の点の全体でつくられる立体 K を考える.

- (1) 平面 $x = t$ による K の切り口はどのような図形か.
- (2) K の体積を求めよ.

第 5 問

袋 A には 1 から n までの番号のついた n 枚のカードが入っており、袋 B には 1 から m までの番号のついた m 枚のカードが入っている。ただし、 $m > n$ とする。

n 人の人が 1 回目に袋 A から無作為にカードを 1 枚ずつ取り、2 回目に袋 B から無作為にカードを 1 枚ずつ取る。ただし、取り出したカードはもとに戻さないものとする。

(1) すべての人について 2 回目のカードの番号のほうが 1 回目のカードの番号より大きいという事象の確率 $P_{n,m}$ を求めよ。

(2) $m = 2n$ のときの $P_{n,2n}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{n,2n}$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)