

大阪大学 1986 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

- (1) $\log_3 4$ は無理数であることを証明せよ。
 (2) a, b は無理数で、 a^b が有理数であるような数の組 a, b を求めよ。

▶ 解法 1 (素因数の一意性と具体的構成)

【方針】

(1) は有理数と仮定して整数の指数等式へ直し、素因数の違いに矛盾させる。(2) はその無理数を指数に使い、値が 2 になる底を選ぶ。

【解答】

(1) $\log_3 4$ が有理数であると仮定する。正の整数 m, n を用いて

$$\log_3 4 = \frac{m}{n}$$

と書けば

$$3^m = 4^n = 2^{2n}$$

となる。左辺の素因数は 3 だけ、右辺の素因数は 2 だけなので、素因数分解の一意性に反する。従って $\log_3 4$ は無理数である。

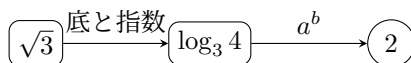
(2)

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \log_3 4$$

と置く。 a, b はともに無理数であり

$$a^b = (\sqrt{3})^{\log_3 4} = 3^{\log_3 2} = 2$$

は有理数である。従ってこの組は条件を満たす。



▶ 解法 2 (場合分けによる存在構成)

【方針】

(1) は奇偶性だけで矛盾を得る。(2) は $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数か無理数かで分け、どちらでも条件を満たす組を作る。

【解答】

(1) $\log_3 4 = m/n$ と仮定すれば

$$3^m = 2^{2n}$$

となる。しかし左辺は奇数、右辺は偶数であり矛盾する。よって $\log_3 4$ は無理数である。

(2)

$$u = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

と置く。

u が有理数なら

$$(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

とすれば a, b は無理数で $a^b = u$ は有理数である。

u が無理数なら

$$(a, b) = (u, \sqrt{2})$$

とすれば a, b は無理数であり

$$a^b = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = 2$$

は有理数である。

従ってどちらの場合にも条件を満たす組が存在する。

【総評】 難易度 3、計算量 2。目安時間は 10 分である。(1) は有理数の仮定を整数指数の等式へ直す。(2) は具体例を一組示せばよく、解法 1 は前問を利用し、解法 2 は値の有理・無理による場合分けで存在を保証する。後者では場合分けのどちらでも底と指数が無理数であることを明記する。

【第 2 問】

xy 平面内の曲線 $C: y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ 上の相異なる 2 点 $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $Q\left(b, \frac{1}{b}\right)$ (ただし, $0 < a < b$) に対し, $R\left(b, \frac{1}{a}\right)$ とおく。

いま, 点 P, Q が, $\triangle PQR$ と $\triangle OPQ$ の面積の比が一定値 k , すなわち $\frac{\triangle PQR}{\triangle OPQ} = k$ であるように曲線 C 上を動くとき, 点 P, Q における曲線 C の接線の交点 S の軌跡を求めよ。ただし, O は原点である。

▶ 解法 1 (面積比と接線の連立)

【方針】

座標三角形の面積公式だけで比を求め、 b/a を一定にする。二接線を連立して交点を求め、積 XY から軌跡を出す。

【解答】

$P = (a, 1/a)$ 、 $Q = (b, 1/b)$ 、 $R = (b, 1/a)$ とする。座標による三角形の面積公式から

$$[PQR] = \frac{(b-a)^2}{2ab}, \quad [OPQ] = \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

従って

$$k = \frac{b-a}{a+b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1+k}{1-k}.$$

特に $0 < k < 1$ である。

$y = 1/x$ の $x = t$ における接線は

$$y = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t}$$

である。 $t = a, b$ の二接線の交点を $S = (X, Y)$ とすると、連立して

$$X = \frac{2ab}{a+b}, \quad Y = \frac{2}{a+b}.$$

従って

$$XY = \frac{4ab}{(a+b)^2} = 1 - k^2.$$

また $X, Y > 0$ である。

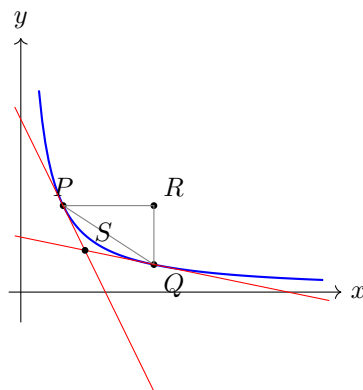
逆に $XY = 1 - k^2$ 、 $X, Y > 0$ を満たす点を取り、

$$r = \frac{1+k}{1-k}, \quad a = \frac{X(1+r)}{2r}, \quad b = ra$$

と置けば、上の式から接線の交点は (X, Y) になる。よって軌跡は

$$xy = 1 - k^2, \quad x > 0, \quad y > 0$$

である。



▶ 解法 2 (比 $r=b/a$ を先に固定する)

【方針】

初めから $b = ra$ と置く。面積比で r を決めると、接点の一つの倍率 a だけで動く。交点座標を a, r で表し、 a を消去する。

【解答】

$r = b/a > 1$ と置く。二三角形の底と高さを座標から求めると

$$\frac{[PQR]}{[OPQ]} = \frac{(r-1)^2}{r^2-1} = \frac{r-1}{r+1}.$$

従って

$$r = \frac{1+k}{1-k}$$

は一定である。

接点の x 座標が t のとき、接線は $ty = 2 - x/t$ と書ける。 $t = a, ra$ の二式を連立すると

$$S = \left(\frac{2ra}{1+r}, \frac{2}{a(1+r)} \right).$$

$a > 0$ を動かすと第一座標は a に比例し、第二座標は a に反比例する。その積は

$$\frac{4r}{(1+r)^2} = 1 - k^2.$$

従って S は正の枝

$$xy = 1 - k^2, \quad x > 0, \quad y > 0$$

上を動く。逆にこの枝上では第一座標から正の a が一意に決まり、第二座標も積の式で一致するため、枝全体が実現される。

【総評】 難易度 6、計算量 5。目安時間は 22 分である。非行列問題なので行列式は使わず、座標三角形の面積公式と接線の連立だけで完結させた。面積比から b/a が一定になること、軌跡の正の枝全体が実現されることが採点の要点である。

【第 3 問】

正の数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ が $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$ を満たしながら変わるとき

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_5$$

の最大値を、次の手順で求めよ。

- (1) $\alpha < 2\pi$ を満たす正の数 α を決める。 $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ のとき、 $\sin \theta_1 + \sin \theta_2$ の最大値を求めよ。
- (2) $\beta < 2\pi$ を満たす正の数 β を決める。 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \beta$ のとき、 $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4$ の最大値を θ_5 で表せ。
- (3) $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_5$ の最大値を求めよ。

▶ 解法 1 (誘導に従って角を等分する)

【方針】

二つ、四つ、五つの順に、固定和の正弦和を最大化する。最後は θ_5 だけの関数にして増減を調べる。

【解答】

(1) 和積公式より

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

$0 < \alpha < 2\pi$ だから、最大値は $\theta_1 = \theta_2 = \alpha/2$ のとき

$$2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

である。

(2) $\gamma = \theta_1 + \theta_2$ と置き、(1) を二組へ用いると四つの正弦和は

$$2 \sin \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = 4 \sin \frac{\beta}{4} \cos \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{4} \right)$$

以下である。最大は四つの角がすべて $\beta/4$ のときである。 $\beta = 2\pi - \theta_5$ だから、その最大値は

$$4 \cos \frac{\theta_5}{4}.$$

(3) $t = \theta_5$ と置くと最大化すべき関数は

$$F(t) = 4 \cos \frac{t}{4} + \sin t \quad (0 < t < 2\pi)$$

である。

$$F'(t) = -\sin \frac{t}{4} + \cos t.$$

$0 < t < \pi$ では $\cos t$ が減少し $\sin(t/4)$ が増加するので、零点はただ一つである。

$$t = \frac{2\pi}{5}$$

は $\cos(2\pi/5) = \sin(\pi/10)$ よりその零点である。 $\pi \leq t \leq 3\pi/2$ では明らかに $F' < 0$ であり、 $3\pi/2 < t < 2\pi$ でも $u = 2\pi - t$ と置けば $\cos u < \cos(u/4)$ から $F' < 0$ である。

従って最大は全ての角が $2\pi/5$ のときで

$$5 \sin \frac{2\pi}{5}$$

である。

▶ 解法 2 (一点で接する直線による一括評価)

【方針】

$c = 2\pi/5$ における正弦曲線の接線が、区間 $(0, 2\pi)$ 全体で正弦曲線の上にあることを示す。五つの不等式を加えれば一度に最大値が出る。

【解答】

(1) 二つの角については和積公式から

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 \leq 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

等号は $\theta_1 = \theta_2 = \alpha/2$ のときに成り立つ。

(2) これを二組へ適用し、二組の和にも和積公式を用いると

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 \leq 4 \sin \frac{\beta}{4} = 4 \cos \frac{\theta_5}{4}.$$

等号は四つの角が全て $\beta/4$ のときに成り立つ。

(3)

$$c = \frac{2\pi}{5}, \quad L(x) = \sin c + \cos c (x - c)$$

と置く。 $G(x) = L(x) - \sin x$ とすれば

$$G'(x) = \cos c - \cos x.$$

G は $(0, c)$ で減少し、 $(c, 2\pi - c)$ で増加し、 $(2\pi - c, 2\pi)$ で再び減少する。しかも

$$G(c) = 0, \quad G(2\pi) = \sin c + (2\pi - c) \cos c > 0.$$

従って $0 < x < 2\pi$ で

$$\sin x \leq \sin c + \cos c (x - c),$$

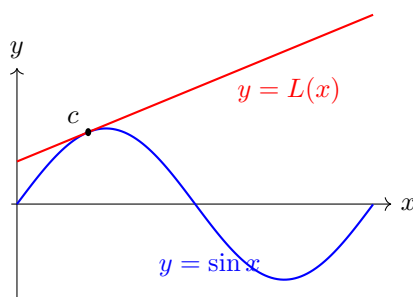
等号は $x = c$ のときだけである。

これを五つの角へ用いて加えると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \sin \theta_i &\leq 5 \sin c + \cos c \left(\sum_{i=1}^5 \theta_i - 5c \right) \\ &= 5 \sin c. \end{aligned}$$

等号は $\theta_1 = \dots = \theta_5 = c$ のときに成立する。従って最大値は

$$5 \sin \frac{2\pi}{5}.$$



【総評】 難易度 6、計算量 5。目安時間は 24 分である。解法 1 は誘導どおり固定和を二等分して最後に一変数の増減を調べる。解法 2 は $2\pi/5$ での接線による全区間評価で五変数を一括処理する。正弦は区間全体で単純な凹関数ではないため、接線評価では導関数の符号と端点まで確認する。

【第 4 問】

xyz 空間内に定点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ がある. いま点 P が yz 平面上の半円 $x = 0$, $y^2 + z^2 = 2$, $y \leq 0$ の上を動くとき, $\triangle PAB$ の周および内部の点の全体でつくられる立体 K を考える.

- (1) 平面 $x = t$ による K の切り口はどのような図形か.
- (2) K の体積を求めよ.

▶ 解法 1 (相似な切り口を積分する)

【方針】

三角形内の点を P, A, B の係数で表し, $x = t$ の条件から P 側の係数範囲を求める. 中央断面との相似比を得て面積を積分する.

【解答】

(1) $P = (0, u, v)$ と置くと

$$u^2 + v^2 = 2, \quad u \leq 0.$$

$\triangle PAB$ 内の点は, 非負の λ, μ, ν を用いて

$$\lambda P + \mu A + \nu B, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

と表せる. $x = t$ では $\mu - \nu = t$ であるから

$$0 \leq \lambda \leq 1 - |t|.$$

その yz 座標は

$$(y, z) = (1, 0) + \lambda\{(u, v) - (1, 0)\}.$$

従って $|t| \leq 1$ の切り口は, $t = 0$ の切り口を点 $(1, 0)$ を中心に比 $1 - |t|$ で縮小した図形であり, $|t| > 1$ では空である.

中央断面は半径 $\sqrt{2}$ の左半円と、底辺 $2\sqrt{2}$ 、高さ 1 の三角形からなる。

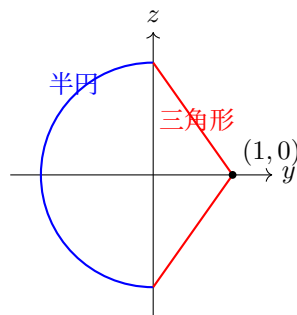
$$S_0 = \pi + \sqrt{2}.$$

(2) 切り口の面積は

$$S(t) = (1 - |t|)^2 (\pi + \sqrt{2})$$

なので

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int_{-1}^1 S(t) dt \\ &= 2(\pi + \sqrt{2}) \int_0^1 (1 - t)^2 dt \\ &= \frac{2}{3}(\pi + \sqrt{2}). \end{aligned}$$



▶ 解法 2 (二つの錐体として体積を出す)

【方針】

中央断面 D を先に求める。正負それぞれの x 側では断面が直線的に縮むため、立体を底面 D 、高さ 1 の二つの錐体とみなす。

【解答】

(1) $x = 0$ の切り口を D とする。 D は yz 平面で、点 $(1, 0)$ と左半円

$$u^2 + v^2 = 2, \quad u \leq 0$$

の各点を結ぶ線分全体である。

$0 \leq t \leq 1$ では、 $x = t$ の切り口は D を点 $(1, 0)$ を中心に比 $1 - t$ で縮小したものになる。同様に $-1 \leq t \leq 0$ では比 $1 + t$ である。従って切り口は、二つの線分と

$$(y - |t|)^2 + z^2 = 2(1 - |t|)^2, \quad y \leq |t|$$

の半円弧で囲まれる。

(2) D の面積は半円と三角形の和で

$$[D] = \pi + \sqrt{2}.$$

$K \cap \{x \geq 0\}$ は頂点 A 、底面 D 、高さ 1 の錐体であり、 $K \cap \{x \leq 0\}$ は頂点 B をもつ同じ大きさの錐体である。従って

$$\text{vol}(K) = 2 \cdot \frac{1}{3}[D] \cdot 1 = \frac{2}{3}(\pi + \sqrt{2}).$$

【総評】 難易度 7、計算量 6。目安時間は 30 分である。中央断面は半円だけでなく、その端点と $(1, 0)$ を結ぶ三角形も含む。解法 1 は相似比の二乗を断面積へ反映して積分し、解法 2 は左右を高さ 1 の二つの錐体とみて積分を省く。行列・行列式・外積は用いず、座標と相似だけで処理した。

■ 【第 5 問】 ■

袋 A には 1 から n までの番号のついた n 枚のカードが入っており、袋 B には 1 から m までの番号のついた m 枚のカードが入っている。ただし、 $m > n$ とする。

n 人の人が 1 回目に袋 A から無作為にカードを 1 枚ずつ取り、2 回目に袋 B から無作為にカードを 1 枚ずつ取る。ただし、取り出したカードはもとに戻さないものとする。

(1) すべての人について 2 回目のカードの番号のほうが 1 回目のカードの番号より大きいという事象の確率 $P_{n,m}$ を求めよ。

(2) $m = 2n$ のときの $P_{n,2n}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{n,2n}$ を求めよ。

▶ 解法 1 (漸化式で割り当てを数える)

【方針】

1 回目の番号順に人を並べ、袋 B の相異なる番号を条件付きで割り当てる。割り当て数の漸化式を解き、階乗の対数を積分比較する。

【解答】

(1) 1 回目の番号が i の人を i 番目と呼ぶ。袋 B から相異なる番号を割り当て、 i 番目には i より大きい番号を与える割り当て数を $F(n, m)$ とする。

n 番目へ与えられる番号は $n + 1, \dots, m$ の $m - n$ 通りである。一つを除き、それより大きい残存番号を 1 ずつ詰めても、残る $1, \dots, n - 1$ 番目の条件は変わらない。従って

$$F(n, m) = (m - n)F(n - 1, m - 1).$$

$F(0, m) = 1$ から

$$F(n, m) = (m - n)^n.$$

全割り当て数は $m!/(m-n)!$ なので

$$P_{n,m} = \frac{(m-n)^n (m-n)!}{m!}.$$

(2) $m = 2n$ では

$$P_{n,2n} = \frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

$\log x$ の増加性による積分比較から

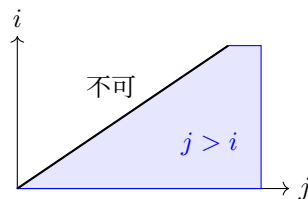
$$\log N! = N \log N - N + o(N)$$

である。従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log P_{n,2n} &= \log n + \frac{1}{n} \log n! - \frac{1}{n} \log(2n)! \\ &= 1 - 2 \log 2 + o(1). \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{n,2n} = 1 - 2 \log 2.$$



▶ 解法 2 (大きい番号の人から直接配る)

【方針】

n 番目から逆順に配り、各段階が常に $m-n$ 択と数える。極限は確率を積にして Riemann 和へ直す。

【解答】

(1) $n, n-1, \dots, 1$ 番目の順に袋 B のカードを配る。 i 番目の段階では、 i より大きい $m-i$ 枚のうち $n-i$ 枚が使用済みなので、選択肢は

$$(m-i) - (n-i) = m-n$$

枚である。従って有利な割り当ては $(m-n)^n$ 通りであり

$$P_{n,m} = \frac{(m-n)^n}{m(m-1) \cdots (m-n+1)}.$$

(2) $m = 2n$ とすると

$$P_{n,2n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdots \frac{n}{2n}.$$

よって

$$\frac{1}{n} \log P_{n,2n} = -\frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} \log \frac{j}{n}.$$

右辺は

$$-\int_1^2 \log x \, dx$$

へ収束する Riemann 和である。従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{n,2n} = -[x \log x - x]_1^2 = 1 - 2 \log 2.$$

【総評】 難易度 8、計算量 6。目安時間は 32 分である。番号順に人を並べ替えるのが核心で、解法 1 は漸化式と階乗評価、解法 2 は逆順の直接積と Riemann 和を使う。全事象は重複なしの順列 $m!/(m-n)!$ である。