

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 1991 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2 次の正方行列 A, B は $AB = -BA, A^2 = B^2 = E$ を満たしているとする. ここで,
 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $(3A + B)^{100}$ を計算せよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, B の表す 1 次変換により曲線 $x^2 - y^2 = 1$ はどのような曲線に移るか. その曲線の方程式を求めよ.

第 2 問

中心 O ，半径 1 の円周上に，反時計まわりの順に 4 点 A, B, C, D が並んでいる． D を含む弧 $\widehat{CA}$ の中点を D_1 ， C を含む弧 $\widehat{BD_1}$ の中点を C_1 とする．

(1) 四角形 ABC_1D_1 の面積は四角形 $ABCD$ の面積より小さくないことを証明せよ．

(2) さらに， D_1 を含む弧 $\widehat{C_1A}$ の中点を D_2 ， C_1 を含む弧 $\widehat{BD_2}$ の中点を C_2 とする．以下同様にくり返して，円周上の点列 $\{C_n\}$ ， $\{D_n\}$ をつくる．

$\alpha_n = \angle D_nOA$ ， $\beta_n = \angle BOC_n$ とおくとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を $\theta = \angle AOB$ を用いて表せ．ただし，円周上の 2 点 P, Q に対して， $\angle POQ$ は P から Q まで反時計まわりにはかるものとする．

第 3 問

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{に対し } h_n(t) = \begin{cases} 1 - n|t| & \left(|t| \leq \frac{1}{n} \text{のとき} \right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{1}{n} \text{のとき} \right) \end{cases} \text{とする.}$$

$$f_n(x) = n \int_{-1}^1 h_n(t) \sin(x - t) dt$$

とおくとき,

(1) $f_n(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

第 4 問

以下の文中の（ア）～（キ）に適する数または式を解答用紙の指定されたところに記入せよ．

- (1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ ($a \neq 0$) における接線と直交し、点 P を通る直線 $y =$ （ア）と、曲線 $y = x^2$ との P と異なる交点 Q の座標は（イ）となる．点 Q を 1 つの頂点とし、 P における接線上に他の 2 頂点をもつ正三角形の面積 S は（ウ）であり、点 P が曲線 $y = x^2$ ($x > 0$) 上を動くとき、 S を最小にする a の値は（エ）である．

- (2) 赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 n 個を 1 列に並べる順列の総数は（オ）である．

いま，赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 n 個の入った箱から無作為に玉を 1 個取り出し，箱に戻すという操作を $n + 3$ 回くり返す．このとき，赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が n 回取り出される確率を P_n とすると， $P_n =$ （カ）であり， $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ （キ）となる．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)