

大阪大学 1991 年度 理系（後期）

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 次の正方行列 A, B は $AB = -BA$, $A^2 = B^2 = E$ を満たしているとする. ここで, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $(3A + B)^{100}$ を計算せよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, B の表す 1 次変換により曲線 $x^2 - y^2 = 1$ はどのような曲線に移るか. その曲線の方程式を求めよ.

【方針】

(1) は反交換関係で交差項を消す。(2) は $AB = -BA$ から B の成分形を決め、 $B^2 = E$ により双曲線の二次形式が保存されることを示す。

【解答】

(1)

$$(3A + B)^2 = 9A^2 + 3(AB + BA) + B^2 = 10E.$$

従って

$$(3A + B)^{100} = 10^{50}E.$$

(2) $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく。 $AB = -BA$ より

$$r = -q, \quad s = -p,$$

従って

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

さらに $B^2 = E$ より

$$p^2 - q^2 = 1.$$

像の座標を $(X, Y) = B(x, y)$ とする。 $B^{-1} = B$ だから

$$x = pX + qY, \quad y = -qX - pY.$$

従って

$$x^2 - y^2 = (p^2 - q^2)(X^2 - Y^2) = X^2 - Y^2.$$

よって像も

$$X^2 - Y^2 = 1$$

で表される同じ双曲線である。

【総評】 反交換する行列のべきと保存される二次形式を問う標準上位問題で目安は 15 分。(2) では $B^{-1} = B$ を用いて像の座標から元の方程式へ戻す。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 2 問】

中心 O 、半径 1 の円周上に、反時計まわりの順に 4 点 A, B, C, D が並んでいる。 D を含む弧 $\widehat{CA}$ の中点を D_1 、 C を含む弧 $\widehat{BD_1}$ の中点を C_1 とする。

- (1) 四角形 ABC_1D_1 の面積は四角形 $ABCD$ の面積より小さくないことを証明せよ。
 (2) さらに、 D_1 を含む弧 $\widehat{C_1A}$ の中点を D_2 、 C_1 を含む弧 $\widehat{BD_2}$ の中点を C_2 とする。以下同様にくり返して、円周上の点列 $\{C_n\}, \{D_n\}$ をつくる。

$\alpha_n = \angle D_nOA$, $\beta_n = \angle BOC_n$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を $\theta = \angle AOB$ を用いて表せ。ただし、円周上の 2 点 P, Q に対して、 $\angle POQ$ は P から Q まで反時計まわりにはかるものとする。

【方針】

円周上の連続する弧の中心角を使う。弧の中点化では、2 つの角の正弦和が平均角の 2 倍の正弦以下になるため面積が減らない。(2) は α_n, β_n の一次漸化式を作る。

【解答】

$\theta = \angle AOB$ 、また連続する弧 BC, CD, DA の中心角を β, δ, α とする。

- (1) 円に内接する四角形の面積は

$$\frac{1}{2}(\sin \theta + \sin \beta + \sin \delta + \sin \alpha).$$

D_1 は弧 CA の中点だから

$$\alpha_1 = \angle D_1OA = \frac{\delta + \alpha}{2}.$$

また C_1 は弧 BD_1 の中点だから

$$\beta_1 = \angle BOC_1 = \frac{\beta + \alpha_1}{2}.$$

$0 < u, v, u + v < 2\pi$ のとき

$$\sin u + \sin v \leq 2 \sin \frac{u + v}{2}$$

である。従って

$$\sin \delta + \sin \alpha \leq 2 \sin \alpha_1, \quad \sin \beta + \sin \alpha_1 \leq 2 \sin \beta_1.$$

以上を足し合わせれば

$$\sin \beta + \sin \delta + \sin \alpha \leq 2 \sin \beta_1 + \sin \alpha_1,$$

よって新しい四角形の面積は小さくない。

- (2) 点の並びから

$$\alpha_{n+1} = \pi - \frac{\theta + \beta_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \pi - \frac{\theta + \alpha_{n+1}}{2}.$$

第 2 式へ第 1 式を代入すると

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4} \beta_n.$$

従って β_n は収束し、その極限は

$$\frac{2\pi - \theta}{3}.$$

第 1 式から α_n も同じ値へ収束する。よって

$$\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \frac{2\pi - \theta}{3}.$$

【総評】 円弧の平均化が面積を増やすことと極限を結ぶ難問で目安は 22 分。正弦和の評価を 2 段階で適用し、更新順序により β_{n+1} が α_{n+1} を使う点に注意する。

【第 3 問】

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ に対し } h_n(t) = \begin{cases} 1 - n|t| & \left(|t| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき} \right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{1}{n} \text{ のとき} \right) \end{cases} \text{ とする.}$$

$$f_n(x) = n \int_{-1}^1 h_n(t) \sin(x-t) dt$$

とおくとき,

- (1) $f_n(x)$ を求めよ.
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

【方針】

核 h_n が偶関数なので、 $\sin(x-t)$ のうち $\sin x \cos t$ の項だけが残る。三角形の重みの積分を部分積分し、係数の極限を基本極限で求める。

【解答】

$h_n(t)$ は偶関数である。 $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ と展開すると、後半は奇関数なので積分が 0 になる。

(1)

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2n \sin x \int_0^{1/n} (1-nt) \cos t \, dt \\ &= 2n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \sin x. \end{aligned}$$

(2)

$$2n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = n^2 \left(2 \sin \frac{1}{2n} \right)^2 \rightarrow 1.$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sin x.$$

【総評】 偶奇性で積分を簡約する標準上位問題で目安は 12 分。外側の係数 n と核内の係数 n の両方を落とさず、極限係数が 1 になることを確認する。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 4 問】

以下の文中の (ア) ~ (キ) に適する数または式を解答用紙の指定されたところに記入せよ.

- (1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ ($a \neq 0$) における接線と直交し、点 P を通る直線 $y =$ (ア) と、曲線 $y = x^2$ との P と異なる交点 Q の座標は (イ) となる. 点 Q を 1 つの頂点とし、 P における接線上に他の 2 頂点をもつ正三角形の面積 S は (ウ) であり、点 P が曲線 $y = x^2$ ($x > 0$) 上を動くとき、 S を最小にする a の値は (エ) である.
- (2) 赤玉 1 個、白玉 2 個、青玉 n 個を 1 列に並べる順列の総数は (オ) である.
いま、赤玉 1 個、白玉 2 個、青玉 n 個の入った箱から無作為に玉を 1 個取り出し、箱に戻すという操作を $n+3$ 回くり返す. このとき、赤玉が 1 回、白玉が 2 回、青玉が n 回取り出される確率を P_n とすると、 $P_n =$ (カ) であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ (キ) となる.

【方針】

(1) は法線と放物線のもう 1 つの交点を求め、正三角形の高さが点と接線の距離になることから面積を表す。(2) は多項分布の確率を整理し、指数関数の基本極限を使う。

【解答】

(1) 点 P における法線は

$$y = -\frac{x}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}.$$

よって (ア) はこの式である。放物線との交点の x 座標の和は $-1/(2a)$ だから、もう 1 つの交点は

$$Q = \left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a} \right)^2 \right).$$

これが (イ) である。

PQ は接線に垂直であり、その長さを d とすると

$$d^2 = \frac{(4a^2 + 1)^3}{16a^4}.$$

正三角形で頂点から対辺までの距離が d のとき面積は $d^2/\sqrt{3}$ だから

$$S = \frac{(4a^2 + 1)^3}{16\sqrt{3}a^4}.$$

これが (ウ) である。 $u = 4a^2$ とおくと $S = (u+1)^3/(\sqrt{3}u^2)$ で、微分により $u = 2$ で最小となる。従って (エ) は

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2) 順列の総数 (オ) は

$$\frac{(n+3)!}{2n!}.$$

各回の赤、白、青の確率はそれぞれ $1/(n+3)$, $2/(n+3)$, $n/(n+3)$ だから

$$P_n = \frac{2(n+3)! n^n}{n!(n+3)^{n+3}}.$$

これが (カ) である。整理すると

$$P_n = 2 \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)^2} \left(\frac{n}{n+3} \right)^n.$$

従って (キ) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{e^3}.$$

【総評】 法線幾何と多項分布の 2 題を正確に処理する計算問題で目安は 22 分。正三角形の面積を高さ d から $d^2/\sqrt{3}$ とする点と、確率の多項係数に注意する。