

大阪大学 1992 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

x についての方程式 $x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ を考える. ここで a, b は実数である.

- (1) この方程式の 4 つの解がすべて正であるための必要十分条件を a, b を用いて表せ.
 (2) $2a + b = 14$ とする. このとき上の方程式の 4 つの解がすべて正の数で, かつそれらが等比数列をなすような a, b の値を求めよ.

【方針】

両辺に x^2 を掛けた相反四次方程式を $t = x + 1/x$ の二次方程式へ変換する. 4 正根条件は異なる 2 つの $t > 2$ に対応する. (2) は等比数列と逆数対称性から根を r^{-3}, r^{-1}, r, r^3 と置く.

【解答】

$x \neq 0$ であり, 両辺に x^2 を掛けて $t = x + 1/x$ とおくと

$$t^2 + at + b - 2 = 0. \quad (1)$$

(1) 1 つの $t > 2$ に対し $x + 1/x = t$ は相異なる 2 つの正根をもつ. 従って元の方程式が 4 つの正根をもつための必要十分条件は, (1) が相異なる 2 根をもち, 両方が 2 より大きいことである. これは

$$a < -4, \quad b + 2a + 2 > 0, \quad a^2 - 4b + 8 > 0$$

と同値である. 実際, 頂点 $-a/2 > 2, t = 2$ で正, 最小値が負という 3 条件である.

(2) 4 根は逆数を取っても同じ集合で, 正の等比数列をなすから, ある $r > 1$ により

$$r^{-3}, \quad r^{-1}, \quad r, \quad r^3$$

と書ける. $u = r + r^{-1} > 2$ とおくと, (1) の 2 根は

$$u, \quad r^3 + r^{-3} = u^3 - 3u.$$

従って

$$a = 2u - u^3, \quad b = u^4 - 3u^2 + 2.$$

条件 $2a + b = 14$ は

$$u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u - 12 = 0$$

であり,

$$(u - 3)(u^3 + u^2 + 4) = 0.$$

$u > 2$ では後の因子は正だから $u = 3$. よって

$$a = -21, \quad b = 56.$$

【総評】 相反方程式の置換と等比根の対称性を組み合わせる難問で目安は 22 分. $t = 2$ では重根 $x = 1$ になるため, 4 つの相異なる正根には $t > 2$ が必要である.

【第 2 問】

k を正の整数, a を実数とする. x についての方程式

$$ax^{k+1} - (1+a)x^k + 1 = 0$$

が 0 と 1 との間 (0, 1 は含まない) に解を持つような a の値の範囲を求めよ.

【方針】

$x = 1$ が常に解であることを利用し, $0 < x < 1$ の別解が存在する条件を a について解く. 得られる関数を負の逆数幂の和として単調性と端の極限を調べる.

【解答】

$0 < x < 1$ とする. 方程式を a について解くと

$$a = \frac{x^k - 1}{x^k(x-1)} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^k}\right).$$

右辺を $h(x)$ とおく. 各 x^{-j} は $0 < x < 1$ で減少するので, $h(x)$ は単調増加する. また

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -k.$$

従って $0 < x < 1$ に解をもつための必要十分条件は

$$a < -k$$

である.

【総評】 恒等的な解 $x = 1$ とは別の区間内解を調べる標準上位問題で目安は 12 分. a を x の関数として解き, 端点を含まないため $a = -k$ を除くことが重要である.

【第 3 問】

赤玉, 白玉, 青玉が各々 a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$) 個入った箱から 2 個の玉を同時に取り出すことを考える.

(1) $n = a + b + c, s = a^2 + b^2 + c^2$ とする.

取り出した 2 個の玉の色が相異なる確率 $P(a, b, c)$ を n, s を用いて表せ.

(2) $n = 11$ のとき, $P(a, b, c)$ を最大にする a, b, c と, そのときの $P(a, b, c)$ の値とを求めよ.

【方針】

異色の組の総数を $ab + bc + ca$ と数え, $n^2 - s$ へ変換する. (2) は和が固定された正整数 3 個の平方和を最小にするには差が 1 以下であることを示す.

【解答】

(1) 異なる色の 2 個を選ぶ方法数は $ab + bc + ca$ だから

$$P(a, b, c) = \frac{ab + bc + ca}{nC_2}.$$

$n^2 = s + 2(ab + bc + ca)$ より

$$P(a, b, c) = \frac{n^2 - s}{n(n-1)}.$$

(2) $n = 11$ では P を最大にするには $s = a^2 + b^2 + c^2$ を最小にすればよい. 2 数の差が 2 以上なら, 大きい方を 1 減らし小さい方を 1 増やすと平方和が減る. 従って 3 数の差は 1 以下でなければならない.

$$(a, b, c) = (3, 4, 4).$$

このとき $s = 41$ だから

$$P_{\max} = \frac{121 - 41}{11 \cdot 10} = \frac{8}{11}.$$

【総評】 確率最大化を整数の平方和最小化へ移す標準問題で目安は 10 分。実数の均等配分で終わらず、正整数かつ順序条件から $(3, 4, 4)$ を確定する。条件を使う箇所、途中計算、端点や等号の判定まで答案に明記すれば、論理を失わず完答できる。

【第 4 問】

m を $0 < m < 1$ なる実数とする。関数 $f(x) = -x \log x$ ($x > 0$), $g(x) = f(mx)$ ($x > 0$) に対し, $y = f(x)$, $y = g(x)$ の表す曲線を, それぞれ C_1 , C_2 とし, 2 つの曲線 C_1 , C_2 の交点 $P(\alpha, -\alpha \log \alpha)$ における, 曲線 C_1 の接線を l_1 , 直線 $x = t$ ($0 < t < \alpha$) を l_2 とする. l_1 , l_2 および C_1 で囲まれる図形の面積を $S_1(t)$, l_1 , l_2 および C_2 で囲まれる図形の面積を $S_2(t)$ とするとき, 次の間に答えよ. ただし, 必要なら $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ の関係は用いてよい.

- (1) $S_1(t)$ を α と t とを用いて表せ.
- (2) α を m で表せ.
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{2}{3}$ となる m の値を求めよ.

【方針】

交点条件から α を求める。接線と各曲線の差を積分し、 $t \rightarrow 0$ では $x \log x \rightarrow 0$ を使って面積の極限を計算する。比の条件を m の一次式へ整理する。

【解答】

$L = \log \alpha$ とおく。 C_1 の P における接線は

$$l_1 : y = \alpha - (L + 1)x$$

である。

(1)

$$S_1(t) = \int_t^\alpha \{\alpha - (L + 1)x + x \log x\} dx$$

だから

$$S_1(t) = \frac{\alpha^2}{4} - \alpha t + \frac{3t^2}{4} - \frac{t^2}{2} \log \frac{t}{\alpha}.$$

(2) 交点条件 $f(\alpha) = f(m\alpha)$ は

$$\log \alpha = m \log(m\alpha)$$

だから

$$\alpha = m^{m/(1-m)}.$$

(3) C_2 は $g(x) = -mx \log(mx)$ である。接線は両曲線より上にあるので

$$S_2(t) = \int_t^\alpha \{\alpha - (L + 1)x + mx \log(mx)\} dx.$$

$t \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow 0} S_1(t) = \frac{\alpha^2}{4}.$$

また $(1 - m)L = m \log m$ を用いて整理すると

$$\lim_{t \rightarrow 0} S_2(t) = \frac{2 - m}{4} \alpha^2.$$

従って

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{1}{2 - m}.$$

これが $2/3$ だから

$$m = \frac{1}{2}.$$

【総評】 接線面積の極限を 2 曲線で比較する難問で目安は 22 分。交点関係 $(1 - m) \log \alpha = m \log m$ を面積式の整理に再利用するのが核心である。