

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 1993 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, 条件

(イ)

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{l=1}^n \frac{b_l}{n+l}$$

($n = 1, 2, \dots$)

(ロ) $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$)

(ハ) b_n ($n = 1, 2, \dots$) は正の整数

を満たすものとする.

次の問に答えよ.

(1) $b_1 = 1$ を示せ.

(2) b_n ($n = 2, 3, \dots$) を求めよ.

(3) さらに $\{a_n\}$ が $a_{2n} = \frac{1}{2}a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき, a_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ.

第 2 問

1 辺の長さ 1 の正方形 $ABCD$ を底面とする四角錐 $EABCD$ の 4 つの側面 EAB , EBC , ECD , EDA がいずれも正三角形であるとする.

辺 AD の中点を M , 辺 BC の中点を N とする. 辺 AE 上に A , E と異なる点 P をとり, 3 点 M , N , P を通る平面でこの四角錐を切るとき, 切断面としてできる等脚台形の面積を S とする. AP の長さを x とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) MP の長さを x を用いて表せ.
- (2) S を x を用いて表せ.
- (3) S を最小にする x の値, およびそのときの S の値を求めよ.

第 3 問

2つの曲線

$$C_1 : y = f(x) \quad (x > 0), \quad C_2 : y = g(x) \quad (x > 0)$$

は、次の3条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たすものとする.

(イ) $x > 0$ において $f(x)$, $g(x)$ は正の値をとる.

(ロ) 曲線 C_1 上の点 P における C_1 の接線と y 軸との交点を Q とするとき, 線分 PQ の中点はつねに曲線 C_2 の上にある.

(ハ) 曲線 C_1 は点 $(1, 2)$ を通る.

t を正の数とする. 曲線 C_1 , x 軸, 直線 $x = t$ および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし, 曲線 C_2 , x 軸, 直線 $x = \frac{t}{2}$ および直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, どのような正の数 t に対しても, つねに $S_1 = S_2$ が成り立つという.

関数 $f(x)$ ($x > 0$) を求めよ.

第 4 問

表の出る確率が p ($0 < p < 1$) の硬貨を 2 回投げる. このとき 1 回目に表が出たら $X_1 = 1$, 裏が出たら $X_1 = 0$, 2 回目に表が出たら $X_2 = 1$, 裏が出たら $X_2 = 0$ とすることにより, 確率変数 X_1 と X_2 とを定義する.

a, b, c を p に無関係な定数とすると, 次の問に答えよ.

- (1) 確率変数 $Y = aX_1 + bX_2 + cX_1X_2$ の期待値 (平均値) $E(Y)$ を求めよ.
- (2) すべての p に対して $E(Y) = p$ を満たし, しかも Y の分散 $V(Y)$ を最小にするように, 定数 a, b, c を定めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)