

大阪大学 1993 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は、条件

(イ)

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{l=1}^n \frac{b_l}{n+l}$$

 $(n = 1, 2, \dots)$ (ロ) $0 < a_n \leq \frac{1}{n} \ (n = 1, 2, \dots)$ (ハ) $b_n \ (n = 1, 2, \dots)$ は正の整数

を満たすものとする.

次の問に答えよ.

(1) $b_1 = 1$ を示せ.(2) $b_n \ (n = 2, 3, \dots)$ を求めよ.(3) さらに $\{a_n\}$ が $a_{2n} = \frac{1}{2}a_n \ (n = 1, 2, \dots)$ を満たすとき, $a_n \ (n = 1, 2, \dots)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

右辺を R_n と置き、左辺の隣接差 $a_{2n-1} - a_{2n}$ の厳密な上下界を使う。正整数 b_n を帰納的に 1 へ絞る。(3) は追加条件と隣接差から奇数項・偶数項を帰納的に決める。

【解答】

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k$$

とおく。

(1) $S_1 = a_1 - a_2 = b_1/2$ である。 $0 < a_1 \leq 1$, $0 < a_2 \leq 1/2$ より $0 < S_1 < 1$ だから、正整数 b_1 は

$$b_1 = 1$$

である。

(2) $b_1 = \dots = b_{n-1} = 1$ と仮定する。条件 (イ) から

$$S_{n-1} = \sum_{j=n}^{2n-2} \frac{1}{j}, \quad S_n = \sum_{j=n+1}^{2n-1} \frac{1}{j} + \frac{b_n}{2n}.$$

従って

$$a_{2n-1} - a_{2n} = S_n - S_{n-1} = \frac{b_n}{2n} - \frac{n-1}{n(2n-1)}.$$

一方、条件 (ロ) より

$$-\frac{1}{2n} < a_{2n-1} - a_{2n} < \frac{1}{2n-1}.$$

これらを比べると

$$-\frac{1}{2n-1} < b_n < 2.$$

 b_n は正整数だから $b_n = 1$ である。帰納法により

$$b_n = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) $a_2 = a_1/2$ と $a_1 - a_2 = 1/2$ より $a_1 = 1$ である。(2) の差の式で $b_n = 1$ とすると

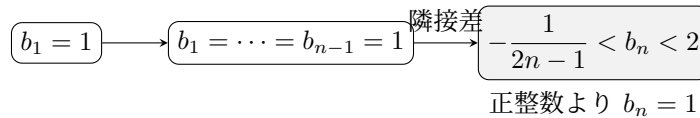
$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}.$$

追加条件 $a_{2n} = a_n/2$ を用いる。 $a_n = 1/n$ と仮定すれば

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad a_{2n-1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

初項から帰納的にすべての項が決まるので

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$



▶ 解法 2

【方針】

b_n が 1 でない最小の添字を仮定する。左右の式をその添字と 1 つ前で引き、未知の正整数 b_n を長さ 2 未満の开区間へ閉じ込めて矛盾を出す。(3) は偶数項の条件と隣接差を強い帰納法で使う。

【解答】

左辺を

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k$$

とおく。

(1)

$$\frac{b_1}{2} = S_1 = a_1 - a_2$$

である。右辺は正であり、 $a_1 \leq 1$, $a_2 > 0$ から 1 未満である。よって $0 < b_1 < 2$ で、正整数条件から $b_1 = 1$ である。

(2) $b_m \neq 1$ となる最小の $m \geq 2$ があると仮定する。すると $l < m$ では $b_l = 1$ だから

$$S_{m-1} = \sum_{j=m}^{2m-2} \frac{1}{j}, \quad S_m = \sum_{j=m+1}^{2m-1} \frac{1}{j} + \frac{b_m}{2m}.$$

差を取れば

$$a_{2m-1} - a_{2m} = \frac{b_m}{2m} - \frac{m-1}{m(2m-1)}.$$

一方、

$$-\frac{1}{2m} < a_{2m-1} - a_{2m} < \frac{1}{2m-1}.$$

したがって

$$-\frac{1}{2m-1} < b_m < 2.$$

b_m は正整数なので $b_m = 1$ となり、最小性に矛盾する。ゆえに

$$b_n = 1 \quad (n \geq 1).$$

(3) $a_2 = a_1/2$ と $a_1 - a_2 = 1/2$ より $a_1 = 1$ である。また上の差の式は

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}$$

となる。 $a_n = 1/n$ まで分かっているとき、

$$a_{2n} = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2n},$$

$$a_{2n-1} = a_{2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

強い帰納法により

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

【総評】 正整数条件と小さな誤差評価を組み合わせる難問で目安は 25 分。差 $S_n - S_{n-1}$ の端の項を正確に処理し、正整数が 1 しかない幅へ押し込むことが核心である。

【第 2 問】

1 辺の長さ 1 の正方形 $ABCD$ を底面とする四角錐 $EABCD$ の 4 つの側面 EAB , EBC , ECD , EDA がいずれも正三角形であるとする。

辺 AD の中点を M , 辺 BC の中点を N とする。辺 AE 上に A , E と異なる点 P をとり, 3 点 M , N , P を通る平面でこの四角錐を切るとき, 切断面としてできる等脚台形の面積を S とする。 AP の長さを x とするとき, 次の問に答えよ。

- (1) MP の長さを x を用いて表せ。
- (2) S を x を用いて表せ。
- (3) S を最小にする x の値, およびそのときの S の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

四角錐を座標化し、切断平面が底辺 MN に平行な方向を含むことから、 AE, BE 上の同じ比の 2 点が上底になる。台形の高さを脚の長さから求めて面積を一変数化する。

【解答】

底面を $z = 0$ に置き

$$A = (-1/2, -1/2, 0), B = (1/2, -1/2, 0), C = (1/2, 1/2, 0), D = (-1/2, 1/2, 0)$$

とする。4 本の側辺は長さ 1 なので $E = (0, 0, 1/\sqrt{2})$ と置ける。また

$$M = (-1/2, 0, 0), \quad N = (1/2, 0, 0).$$

$AP = x$ かつ $AE = 1$ より

$$P = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

(1)

$$MP^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{x^2}{2} = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

従って

$$MP = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}.$$

(2) 切断平面は MN 方向を含むため、辺 BE 上で $BQ = x$ となる点 Q も通る。上底 PQ は MN と平行で

$$MN = 1, \quad PQ = 1 - x.$$

台形の高さを h とすると、脚 MP の底辺方向成分が $x/2$ だから

$$h^2 = MP^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4}.$$

よって

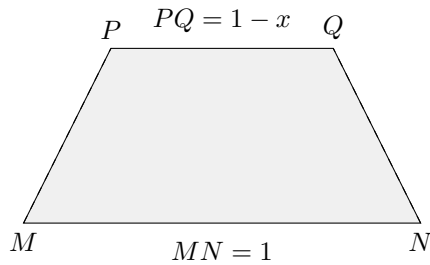
$$S = \frac{MN + PQ}{2} h = \frac{2-x}{4} \sqrt{3x^2 - 2x + 1}.$$

(3) $0 < x < 1$ である。 $16S^2 = (2-x)^2(3x^2 - 2x + 1)$ を微分すると

$$\frac{d}{dx}(16S^2) = -6(2-x)(2x-1)(x-1).$$

従って $x = 1/2$ で最小となり、

$$S_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$



▶ 解法 2

【方針】

切断面を相似比から等脚台形として捉え、脚と上下底を求める。面積の最小化は微分せず、 $16S^2 - 27/16$ を $(2x - 1)^2$ を含む積へ因数分解して等号条件を読む。

【解答】

辺 BE 上で $BQ = x$ となる点を Q とする。三角形 AEB で $AP/AE = BQ/BE = x$ だから

$$PQ \parallel AB, \quad PQ = 1 - x.$$

また $MN \parallel AB$ で $MN = 1$ なので、切断面は等脚台形 $MNPQ$ である。

(1) 座標を

$$A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \quad E = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad M = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

と置けば

$$P = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

よって

$$MP^2 = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad MP = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 2x + 1}.$$

(2) 脚 MP の底辺方向成分は $x/2$ だから台形の高さ h は

$$h^2 = MP^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4}.$$

したがって

$$S = \frac{MN + PQ}{2} h = \frac{2-x}{4} \sqrt{3x^2 - 2x + 1}.$$

(3) $0 < x < 1$ である。代数的に

$$\begin{aligned} 16S^2 - \frac{27}{16} &= (2-x)^2(3x^2 - 2x + 1) - \frac{27}{16} \\ &= \frac{(2x-1)^2(12x^2 - 44x + 37)}{16}. \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ では $12x^2 - 44x + 37 > 5 > 0$ だから、右辺は 0 以上である。等号は $x = 1/2$ のときに限る。よって

$$x = \frac{1}{2}, \quad S_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

【総評】 空間図形を座標化して台形の面積を最小化する難問で目安は 22 分。切断面の上底が BE 上の同じ内分比に現れること、台形の高さが空間距離 MP そのものではない点に注意する。

【第 3 問】

2 つの曲線

$$C_1 : y = f(x) \quad (x > 0), \quad C_2 : y = g(x) \quad (x > 0)$$

は、次の 3 条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たすものとする.

(イ) $x > 0$ において $f(x), g(x)$ は正の値をとる.

(ロ) 曲線 C_1 上の点 P における C_1 の接線と y 軸との交点を Q とするとき、線分 PQ の中点はつねに曲線 C_2 の上にある.

(ハ) 曲線 C_1 は点 $(1, 2)$ を通る.

t を正の数とする. 曲線 C_1 , x 軸, 直線 $x = t$ および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし, 曲線 C_2 , x 軸, 直線 $x = \frac{t}{2}$ および直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, どのような正の数 t に対しても, つねに $S_1 = S_2$ が成り立つという.

関数 $f(x)$ ($x > 0$) を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接点を $(x, f(x))$ として接線の y 切片を求め、中点条件から $g(x/2)$ を f, f' で表す. 面積恒等式を t で微分し、得られる微分関係を初期条件で解く.

【解答】

曲線 C_1 上の接点を $(x, f(x))$ とする. 接線の y 軸との交点は

$$Q = (0, f(x) - xf'(x))$$

だから、その中点が C_2 上にある条件は

$$g(x/2) = f(x) - \frac{x}{2}f'(x). \quad (1)$$

$t > 1$ のとき面積条件は

$$\int_1^t f(x) dx = \int_{1/2}^{t/2} g(x) dx$$

である. $0 < t < 1$ でも両辺の積分の向きをそろえれば同じ等式になる. これを t で微分して

$$f(t) = \frac{1}{2}g(t/2).$$

(1) を代入すると

$$f(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{t}{4}f'(t),$$

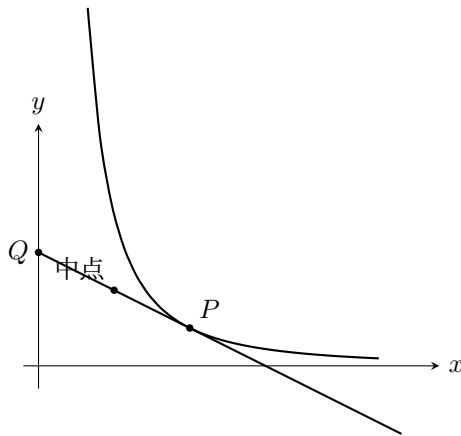
従って

$$tf'(t) = -2f(t).$$

よって $\frac{d}{dt}\{t^2f(t)\} = 0$ であり、 $f(1) = 2$ から

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

を得る.



▶ 解法 2

【方針】

面積条件を任意の 2 端点の積分等式へ拡張し、変数変換によって被積分関数そのものの等式 $g(x/2) = 2f(x)$ を得る。接線の切片から得る中点条件と直接結合し、保存量 $x^2 f(x)$ を見つける。

【解答】

接点 $P = (x, f(x))$ における接線の y 切片は

$$f(x) - xf'(x)$$

である。したがって PQ の中点条件は

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{x}{2}f'(x). \quad (1)$$

面積等式は任意の正の端点 u, v に対して

$$\int_u^v f(x) dx = \int_{u/2}^{v/2} g(s) ds$$

と書ける。右辺で $x = 2s$ と変数変換すると

$$\int_u^v f(x) dx = \frac{1}{2} \int_u^v g\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

これは任意の区間で成立するので、連続性から

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = 2f(x). \quad (2)$$

(1), (2) を比べると

$$2f(x) = f(x) - \frac{x}{2}f'(x),$$

すなわち

$$xf'(x) = -2f(x).$$

よって

$$\frac{d}{dx}\{x^2 f(x)\} = 2xf(x) + x^2 f'(x) = 0.$$

したがって $x^2 f(x) = C$ である。条件 $f(1) = 2$ より $C = 2$ なので

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad (x > 0).$$

この関数から (1) で得る g は正であり、面積条件も満たす。

【総評】 幾何条件と任意の区間に対する面積恒等式から関数を決める上位問題で目安は 18 分。積分上端の $t/2$ による係数 $1/2$ と、 $t < 1$ でも向きをそろえた積分等式が使えることが重要である。

【第 4 問】

表の出る確率が p ($0 < p < 1$) の硬貨を 2 回投げる. このとき 1 回目に表が出たら $X_1 = 1$, 裏が出たら $X_1 = 0$, 2 回目に表が出たら $X_2 = 1$, 裏が出たら $X_2 = 0$ とすることにより, 確率変数 X_1 と X_2 とを定義する.

a, b, c を p に無関係な定数とすると, 次の問に答えよ.

- (1) 確率変数 $Y = aX_1 + bX_2 + cX_1X_2$ の期待値 (平均値) $E(Y)$ を求めよ.
- (2) すべての p に対して $E(Y) = p$ を満たし, しかも Y の分散 $V(Y)$ を最小にするように, 定数 a, b, c を定めよ.

▶ 解法 1

【方針】

4 通りの表裏で Y の値を求めて期待値を p の多項式にする. 恒等式条件から係数を決め, 独立なベルヌーイ変数の分散の和として $a^2 + b^2$ を最小化する.

【解答】

(1) X_1, X_2 は独立で, それぞれ期待値 p , また $E(X_1X_2) = p^2$ である. 従って

$$E(Y) = (a + b)p + cp^2.$$

(2) すべての p で $E(Y) = p$ となる条件は

$$a + b = 1, \quad c = 0.$$

このとき $Y = aX_1 + bX_2$ であり, 独立性から

$$V(Y) = a^2p(1-p) + b^2p(1-p) = p(1-p)(a^2 + b^2).$$

$a + b = 1$ のもとで

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

等号は $a = b = 1/2$ のときである. 従って

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 0.$$

$X_1 = 1$	a	$a + b + c$
$X_1 = 0$	0	b
	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$

▶ 解法 2

【方針】

4通りの (X_1, X_2) ごとに Y の値と確率を表にし、期待値を直接作る。不偏条件を係数比較した後、分散を $E(Y^2) - E(Y)^2$ から計算し、平方完成で最小化する。

【解答】

(1) $(X_1, X_2) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ に対する Y の値は順に

$$0, \quad a, \quad b, \quad a + b + c$$

であり、確率は順に

$$(1-p)^2, \quad p(1-p), \quad p(1-p), \quad p^2$$

である。したがって

$$\begin{aligned} E(Y) &= ap(1-p) + bp(1-p) + (a+b+c)p^2 \\ &= (a+b)p + cp^2. \end{aligned}$$

(2) これがすべての p で p に等しいための条件は

$$a + b = 1, \quad c = 0.$$

このとき

$$E(Y^2) = (a^2 + b^2)p(1-p) + (a+b)^2p^2 = (a^2 + b^2)p(1-p) + p^2.$$

よって

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = (a^2 + b^2)p(1-p).$$

$b = 1 - a$ を代入すると

$$a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

したがってすべての $0 < p < 1$ で分散を最小にするのは

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = 0$$

のときである。

【総評】 期待値の不偏条件と分散最小化を扱う標準問題で目安は 12 分。恒等式が全ての p に対する条件であることから係数比較し、共分散が 0 なのは独立性によると明記する。