

大阪大学 1995 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + 1$ が $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) で極値をとるものとする。また曲線 $y = f(x)$ 上の点

$$A = (\alpha, f(\alpha)), \quad B = (\beta, f(\beta)), \quad C = (\gamma, f(\gamma))$$

を考える。

- (1) a_1, a_2, a_3 を α, β, γ を用いて表せ。
- (2) 直線 AB の傾きを α, β, γ で表し、因数分解せよ。
- (3) α, β, γ が等差数列をなし、かつ直線 AB と直線 BC が直交するとき $\beta - \alpha$ を求めよ。
- (4) さらに、曲線 $y = f(x)$ が y 軸に関して対称であるとき 3 点 A, B, C をとおき y 軸に平行な対称軸をもつ放物線を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

f' を 3 根で因数分解して係数比較する。弦の傾きは f' の定積分の平均として計算し、等差条件で簡単化する。偶関数条件から 3 根の配置を確定する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

係数比較から

$$a_1 = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad a_2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2}, \quad a_3 = -\alpha\beta\gamma.$$

(2) $d = \beta - \alpha, e = \gamma - \beta$ とおく。 $x = \alpha + t$ として

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{d} \int_0^d t(t - d)(t - d - e)dt = \frac{d^2(d + 2e)}{12}.$$

従って傾きは

$$\frac{(\beta - \alpha)^2(2\gamma - \alpha - \beta)}{12}.$$

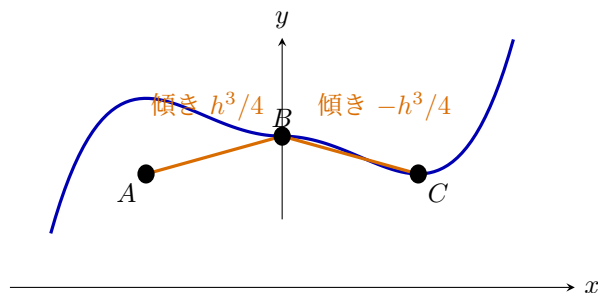
(3) 等差数列なら $d = e = h > 0$ で、 AB の傾きは $h^3/4$ 。同様に BC の傾きは $-h^3/4$ である。直交条件から $-h^6/16 = -1$ 、従って

$$\beta - \alpha = h = 2^{2/3}.$$

(4) f が偶関数なので $a_1 = a_3 = 0$ 、3 つの極値点は $\alpha = -h, \beta = 0, \gamma = h$ である。 $f'(x) = x(x^2 - h^2)$ より $f(x) = x^4/4 - h^2x^2/2 + 1$ 。従って $B = (0, 1)$ 、 A, C の高さは $1 - h^4/4$ である。求める放物線を $y = 1 + kx^2$ とすると $kh^2 = -h^4/4$ だから

$$y = 1 - \frac{h^2}{4}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2^{2/3}}.$$

【3 極値点と 2 本の弦】



▶ 解法 2

【方針】

f' の 3 根をヴィエタの公式で係数へ戻す。等差条件では中央の極値点を原点とする変数に平行移動し、奇関数型の導関数を対称区間で積分して 2 本の弦の傾きを求める。

【解答】

(1)

$$f'(x) = x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

ヴィエタの公式より

$$a_1 = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad a_2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2}, \quad a_3 = -\alpha\beta\gamma.$$

(2)

$d = \beta - \alpha$ 、 $e = \gamma - \beta$ とし $x = \alpha + t$ とおく。

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{d} \int_0^d t(t-d)(t-d-e) dt = \frac{d^2(d+2e)}{12}.$$

従って傾きは

$$\frac{(\beta - \alpha)^2(2\gamma - \alpha - \beta)}{12}.$$

(3)

等差間隔を $h > 0$ とすると、 $u = x - \beta$ により

$$f'(x) = u(u^2 - h^2).$$

対称性から弦 AB, BC の傾きはそれぞれ

$$\frac{h^3}{4}, \quad -\frac{h^3}{4}.$$

直交条件は

$$-\frac{h^6}{16} = -1$$

だから

$$\beta - \alpha = h = 2^{2/3}.$$

(4)

偶関数なら $a_1 = a_3 = 0$ 。3 つの相異なる極値の配置は

$$\alpha = -h, \quad \beta = 0, \quad \gamma = h$$

であり

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{h^2x^2}{2} + 1.$$

$B = (0, 1)$ 、 A, C の高さは $1 - h^4/4$ である。軸が y 軸に平行で 3 点を通る放物線は

$$y = 1 - \frac{h^2}{4}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2^{2/3}}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。弦の傾きを原始関数の差ではなく f' の平均として計算することで因数分解形を保った。等差間隔の二つの傾きは正負対称になり、偶関数条件では極値点と放物線の軸を一意に確定した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

空間内に方程式 $x + y + z = 3$ で表される平面 H がある。 xy 平面上の点 A_1 が与えられたとき H 上の点 $B_1, B_2, \dots, xy$ 平面上の点 $A_2, A_3, \dots$ を順次以下のように定める。 A_1 をととり H に垂直な直線と H との交点を B_1 とし、 B_1 をととり xy 平面に垂直な直線と xy 平面の交点を A_2 とする。同様に A_n ($n \geq 2$) をととり H に垂直な直線と H との交点を B_n とし、 B_n をととり xy 平面に垂直な直線と xy 平面の交点を A_{n+1} とする。

(1) A_n の x 座標および y 座標をそれぞれ x_n, y_n とするとき、

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + c, \quad y_{n+1} = a'x_n + b'y_n + c'$$

が成り立つように定数 a, b, c, a', b', c' を定めよ。

(2) 点 $A_1(x_1, y_1, 0)$ をととり平面 H および xy 平面と直交する平面の方程式を求めよ。

(3) 三角形 $A_1B_1A_2$ と三角形 $A_2B_2A_3$ の面積の比を求めよ。

(4) x_n, y_n を x_1, y_1, n で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

H の法線方向への射影量を求める。和 $x_n + y_n$ と差 $x_n - y_n$ に分けると、差は不変、和は一次漸化式になる。

【解答】

$A_n = (x_n, y_n, 0)$ とする。 H の法線は $(1, 1, 1)$ であり、 $A_n + \lambda(1, 1, 1) \in H$ から

$$\lambda_n = \frac{3 - x_n - y_n}{3}.$$

従って $A_{n+1} = (x_n + \lambda_n, y_n + \lambda_n, 0)$ 。 (1)

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - y_n + 3}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{-x_n + 2y_n + 3}{3}.$$

従って $a = 2/3, b = -1/3, c = 1, a' = -1/3, b' = 2/3, c' = 1$ 。 (2) 求める平面の法線は $(1, 1, 1)$ と $(0, 0, 1)$ の両方に垂直な $(1, -1, 0)$ 。従って

$$x - y = x_1 - y_1.$$

(3) $\overrightarrow{A_nB_n} = \lambda_n(1, 1, 1)$ 、 $\overrightarrow{B_nA_{n+1}} = -\lambda_n(0, 0, 1)$ なので面積は $\sqrt{2}\lambda_n^2/2$ 。また (1) から $\lambda_{n+1} = \lambda_n/3$ だから

$$[A_1B_1A_2] : [A_2B_2A_3] = 9 : 1.$$

(4) $d_n = x_n - y_n$ 、 $s_n = x_n + y_n$ とおくと

$$d_{n+1} = d_n, \quad s_{n+1} = 2 + \frac{s_n}{3}.$$

従って

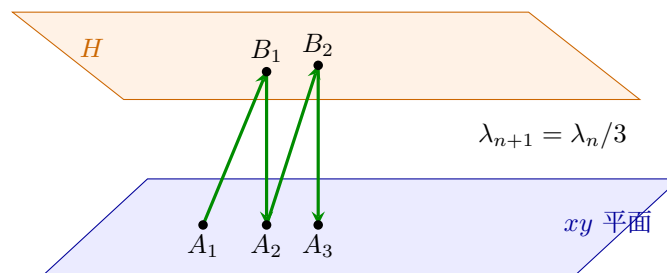
$$d_n = x_1 - y_1, \quad s_n = 3 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}}.$$

よって

$$x_n = \frac{1}{2} \left(3 + x_1 - y_1 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}} \right),$$

$$y_n = \frac{1}{2} \left(3 - x_1 + y_1 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}} \right).$$

【2 平面間の直交射影】



▶ 解法 2

【方針】

xy 平面上の点を 2 次元のアフィン写像で更新する。更新行列の固有方向 $(1, -1)$ 、 $(1, 1)$ へ分解して、不変平面、面積比、一般項を同じ計算から導く。

【解答】

$A_n = (x_n, y_n, 0)$ とする。平面 H の法線は $(1, 1, 1)$ なので

$$B_n = A_n + \lambda_n(1, 1, 1), \quad \lambda_n = \frac{3 - x_n - y_n}{3}.$$

A_{n+1} は B_n の xy 平面への正射影である。

(1)

従って

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$a = b' = \frac{2}{3}, \quad b = a' = -\frac{1}{3}, \quad c = c' = 1.$$

(2)

差の方向 $(1, -1)$ は固有値 1 だから

$$x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n.$$

すべての A_n, B_n は

$$x - y = x_1 - y_1$$

上にあり、この平面の法線 $(1, -1, 0)$ は H と xy 平面の法線の両方に垂直である。

(3)

和の方向 $(1, 1)$ の固有値は $1/3$ なので

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{3}.$$

三角形 $A_n B_n A_{n+1}$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\lambda_n(1, 1, 1) \times \{-\lambda_n(0, 0, 1)\}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_n^2.$$

よって面積比は $9:1$ である。

(4)

$$d_n = x_n - y_n, \quad s_n = x_n + y_n$$

とおくと

$$d_n = x_1 - y_1, \quad s_n = 3 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}}.$$

従って

$$x_n = \frac{1}{2} \left(3 + x_1 - y_1 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}} \right),$$

$$y_n = \frac{1}{2} \left(3 - x_1 + y_1 + \frac{x_1 + y_1 - 3}{3^{n-1}} \right).$$

【総評】 難度 7、計算量 7。二つの直交射影を座標で追うと、各段階の移動量 λ_n が 3 分の 1 になる。面積比は移動量の二乗比であり、一般項は和と差へ分離して初期値まで戻して検算した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

2 つの曲線

$$C_1 : y = x^{\frac{3}{2}} \quad (x \geq 0), \quad C_2 : y = x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \geq 0)$$

を考える。 $0 \leq t \leq 1$ の範囲の t に対し、 C_1 、 C_2 と直線 $x = t$ とで囲まれた図形を D_1 、 C_2 と 3 直線 $y = 0$ 、 $x = t$ 、 $x = 1$ とで囲まれた図形を D_2 とする。 D_1 と D_2 を x 軸のまわりに一回転してできる回転体の体積をそれぞれ $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ とする。

(1) $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ を最小にする t を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

円板法で二つの体積を同一積分にまとめ、 $x^3 e^{-x^2}$ を $u = x^2$ で積分する。得た $V(t)$ を微分して符号を調べる。

【解答】

円板法から

$$V_1 = \pi \int_0^t x^3 (1 - e^{-x^2}) dx, \quad V_2 = \pi \int_t^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

(1)

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2}$$

を用いて整理すると

$$V(t) = \pi \left\{ \frac{t^4}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + (t^2 + 1) e^{-t^2} \right\}.$$

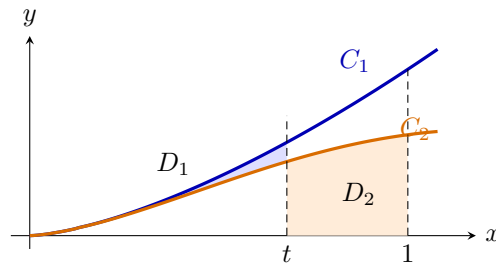
(2) 微分すると

$$V'(t) = \pi t^3 (1 - 2e^{-t^2}).$$

$0 < t \leq 1$ で、 $t^2 < \log 2$ なら負、 $t^2 > \log 2$ なら正である。 $0 < \log 2 < 1$ なので、 V は

$$t = \sqrt{\log 2}$$

でただ一つの最小値をとる。

【2 曲線と回転領域 D_1, D_2 】

▶ 解法 2

【方針】

(1) は置換 $u = x^2$ で指数積分を処理する。(2) は体積そのものを再微分せず、境界 $x = t$ が動くときに加わる断面積と失われる断面積の差から導関数を直接求める。

【解答】

円板法より

$$V_1(t) = \pi \int_0^t x^3(1 - e^{-x^2}) dx, \quad V_2(t) = \pi \int_t^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

(1)

$u = x^2$ とおけば

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^{-u} du = -\frac{1}{2}(u+1)e^{-u}.$$

これを 2 つの体積へ代入して整理すると

$$V(t) = \pi \left\{ \frac{t^4}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + (t^2 + 1)e^{-t^2} \right\}.$$

(2)

t を少し増やすと、 V_1 には $x = t$ の 2 曲線間の回転断面が加わり、 V_2 からは C_2 の回転断面が失われる。従って積分の上端・下端の微分から直接

$$V'(t) = \pi t^3(1 - e^{-t^2}) - \pi t^3 e^{-t^2} = \pi t^3(1 - 2e^{-t^2}).$$

$0 < t < \sqrt{\log 2}$ で負、 $\sqrt{\log 2} < t \leq 1$ で正であり $0 < \log 2 < 1$ だから、ただ一つの最小点は

$$t = \sqrt{\log 2}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 7。回転前の領域ではなく、回転後の断面半径の二乗を用いる点が重要である。二積分の重複部分の符号を整理し、端点を含む区間で導関数が負から正へ変わることを確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。