

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 1997 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ． x 座標と y 座標がともに 0 以上 3 以下である 16 個の格子点を図 1 のように線分で結んで得られる図形 L を考える．

動点 A は点 $(0, 0)$ を出発し、点 $(3, 3)$ に到達するまで L 上を等速で移動する．ただし、格子点では静止せずに x 軸の正の方向または y 軸の正の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する．

動点 B は点 $(3, 3)$ を出発し、点 $(0, 0)$ に到達するまで L 上を等速で移動する．ただし、格子点では静止せずに x 軸の負の方向または y 軸の負の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する．

A 、 B は同時に出発し、 A の速さは B の速さの 3 倍とする．

このとき次の問に答えよ．

- (1) A と B が出会う可能性のある L 上の点をすべて求め、それらの座標を書け．
- (2) A は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の正の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の正の方向に進むとする．同様に、 B は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の負の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の負の方向に進むとする．ただし、 $0 < p < 1$ とする．このとき、(1) で求めた各点において、 A と B が出会う確率をそれぞれ求めよ．
- (3) (2) で求めた確率のうちで、 x 座標が最も小さい点で出会う確率が、他のどの確率よりも大きくなるためには p はどのような範囲にあればよいか．

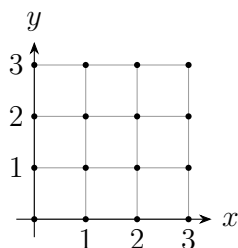


図 1 格子図 L

※原資料アーカイブには図 1 の独立図版が同梱されていないため、本文の条件から格子図を再構成した。

第 2 問

平面上において，直線 l と l 上にない点 A をとる．

直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．

直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．

このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

第 3 問

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) と双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ ($c > 0$) を考える. 点 $P(s, t)$ ($s > 0, t > 0$) を双曲線上にとり, 原点 O と点 P を結ぶ線分と楕円の交点を Q とする. 点 P における双曲線の接線が x 軸と交わる点を A , 点 Q における楕円の接線が x 軸と交わる点を B とする.

点 P を直線 PA と直線 QB が直交するようにとるとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P の座標を求めよ.
- (2) 点 A, B はそれぞれ楕円, 双曲線の焦点であることを示せ.
- (3) k を $0 < k < 1$ を満たす定数とする. a, b, c が $a^2 + c^2 = 1, a^2 - b^2 = k^2$ を満たしながら変化するとき, 直線 PA と直線 QB の交点 R の y 座標が最大となるような a, b, c を求めよ.

第 4 問

a は実数とする. 曲線 $y = e^x$ 上の各点における法線のうちで, 点 $P(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする. $n(a)$ を求めよ.

第 5 問

関数 $f(\theta) = \sqrt{2}\sin^2\theta + \cos\theta$ に対し、次の条件を満たす正の数 a を考える.

$$\begin{cases} |\theta| < a \text{ ならば } f(\theta) > 0 \\ |\theta| = a \text{ ならば } f(\theta) = 0 \end{cases}$$

- (1) a の値を求めよ.
(2) 曲線 C を媒介変数 θ ($-a \leq \theta \leq a$) を用いて

$$C : \begin{cases} x = f(\theta) \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

で定める. x 軸に平行な直線 $y = t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の範囲を求め、共有点の x 座標を t で表せ.

- (3) 曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)