

大阪大学 1997 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。 x 座標と y 座標がともに 0 以上 3 以下である 16 個の格子点を図 1 のように線分で結んで得られる図形 L を考える。

動点 A は点 $(0, 0)$ を出発し、点 $(3, 3)$ に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずに x 軸の正の方向または y 軸の正の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

動点 B は点 $(3, 3)$ を出発し、点 $(0, 0)$ に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずに x 軸の負の方向または y 軸の負の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

A, B は同時に出発し、 A の速さは B の速さの 3 倍とする。

このとき次の問に答えよ。

- (1) A と B が出会う可能性のある L 上の点をすべて求め、それらの座標を書け。
- (2) A は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の正の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の正の方向に進むとする。同様に、 B は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の負の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の負の方向に進むとする。ただし、 $0 < p < 1$ とする。このとき、(1) で求めた各点において、 A と B が出会う確率をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた確率のうちで、 x 座標が最も小さい点で出会う確率が、他のどの確率よりも大きくなるためには p はどのような範囲にあればよいか。

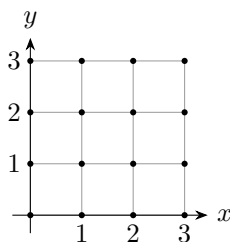


図 1 格子図 L

※原資料アーカイブには図 1 の独立図版が同梱されていないため、本文の条件から格子図を再構成した。

▶ 解法 1

【方針】

出会う点を (x, y) とすると、 A がそこまで進む道のりは単調移動なので $x + y$ 、 B がそこまで進む道のりは $(3 - x) + (3 - y)$ である。速さの比が $3 : 1$ なので $x + y = 3(6 - x - y)$ となり、出会う可能性のある点は直線 $x + y = 9/2$ と格子線分 L の交点に限られる。確率では $q = 1 - p$ と置き、 A は出発後 4.5 辺分、 B は 1.5 辺分進んでいることを使う。各候補点について、 A が対応する 5 本目の辺に入る確率と B が対応する 2 本目の辺に入る確率を掛ける。最後は最小 x の点の確率を他の 3 つと比較する。

【解答】

(1) 出会う点を (x, y) とする。 A は $(0, 0)$ から正の x 方向または正の y 方向へ進むので、 (x, y) までの道のりは $x + y$ である。一方、 B は $(3, 3)$ から負の x 方向または負の y 方向へ進むので、 (x, y) までの道のりは $(3 - x) + (3 - y) = 6 - x - y$ である。

A の速さは B の速さの 3 倍で、同時に出発して同じ時刻に出会うから $x + y = 3(6 - x - y)$ である。したがって $x + y = \frac{9}{2}$ である。これと L の線分との交点を調べると、可能な点は

$$\left(\frac{3}{2}, 3\right), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

である。

(2) $q = 1 - p$ とおく。出会う時刻には、 A は 4.5 辺分、 B は 1.5 辺分進んでいる。したがって、 A が 4 辺進んだ後に入る

辺と、B が 1 辺進んだ後に入る辺を候補点ごとに数えればよい。 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ で出会うには、A は 4 辺進んで $(1, 3)$ に着き、その後右へ進む必要がある。A が $(1, 3)$ に着く確率は、3 回上へ、1 回右へ進む場合であるが、 $(0, 3)$ に着いた後の右方向は強制されるので $p^3 + 3p^3q = p^3(1 + 3q) = p^3(4 - 3p)$ である。B は $(3, 3)$ から 2 回続けて左へ進む必要があるため、その確率は q^2 である。よって $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$: $p^3q^2(4 - 3p)$ である。 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ で出会うには、A は 4 辺進んで $(2, 2)$ に着き、その後上へ進む。A が $(2, 2)$ に着く確率は ${}_4C_2p^2q^2 = 6p^2q^2$ であり、その後上へ進む確率は p である。B は左、下の順に進む必要があるため確率は qp である。したがって $\left(2, \frac{5}{2}\right)$: $6p^4q^3$ である。 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ で出会うには、A は $(2, 2)$ に着いた後右へ進み、B は下、左の順に進む。よって $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$: $6p^3q^4$ である。 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ で出会うには、A は 4 辺進んで $(3, 1)$ に着き、その後上へ進む必要がある。A が $(3, 1)$ に着くには 3 回右へ、1 回上へ進むが、 $(3, 0)$ に着いた後の上方向は強制されるので、その確率は $q^3 + 3pq^3 = q^3(1 + 3p)$ である。B は 2 回続けて下へ進む必要があるため確率は p^2 である。したがって $\left(3, \frac{3}{2}\right)$: $p^2q^3(1 + 3p)$ である。

(3) x 座標が最も小さい点は $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ である。この点で出会う確率を $P_1 = p^3q^2(4 - 3p)$ とおく。他の 3 点の確率を順に $P_2 = 6p^4q^3$, $P_3 = 6p^3q^4$, $P_4 = p^2q^3(1 + 3p)$ とする。

まず $P_1 > P_2$ は、 $0 < p < 1$ より $p^3q^2 > 0$ で割って $4 - 3p > 6pq$ と同値である。これは $6p^2 - 9p + 4 > 0$ であり、この 2 次式の判別式は $81 - 96 < 0$ だから常に成り立つ。

次に $P_1 > P_3$ は $4 - 3p > 6q^2$ と同値であり、整理して $6p^2 - 9p + 2 < 0$ である。この左辺の根は $\frac{9 \pm \sqrt{33}}{12}$ であるから、 $0 < p < 1$ では $p > \frac{9 - \sqrt{33}}{12}$ が必要十分である。

さらに $P_1 > P_4$ は $p(4 - 3p) > q(1 + 3p)$ と同値であり、整理すると $2p > 1$ すなわち $p > \frac{1}{2}$ である。ここで $\frac{9 - \sqrt{33}}{12} < \frac{1}{2}$ なので、3 つの比較をすべて満たす条件は $\frac{1}{2} < p < 1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

出会う時刻を先に決めると、A は 4 辺半、B は 1 辺半進んでいる。各候補点について「直前の格子点へ着く確率」と「次の半辺を選ぶ確率」を表にまとめ、境界で進行方向が強制される経路も同じ表に含める。

【解答】

(1) 出会う点を (x, y) とする。A と B がそこまで進む距離はそれぞれ

$$x + y, \quad 6 - x - y$$

である。速さの比が 3 : 1 だから

$$x + y = 3(6 - x - y), \quad x + y = \frac{9}{2}.$$

格子線との交点は

$$\left(\frac{3}{2}, 3\right), \quad \left(2, \frac{5}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, 2\right), \quad \left(3, \frac{3}{2}\right).$$

(2) $q = 1 - p$ と置く。出会うとき A は 4 辺半、B は 1 辺半を進んでいる。各点へ向かう確率を整理すると

出会う点	A 側	B 側	積
$\left(\frac{3}{2}, 3\right)$	$p^3(1 + 3q)$	q^2	$p^3q^2(4 - 3p)$
$\left(2, \frac{5}{2}\right)$	$6p^3q^2$	pq	$6p^4q^3$
$\left(\frac{5}{2}, 2\right)$	$6p^2q^3$	pq	$6p^3q^4$
$\left(3, \frac{3}{2}\right)$	$q^3(1 + 3p)$	p^2	$p^2q^3(1 + 3p)$

である。端の 2 行にある 1 の項は、境界の格子点で次の方向が強制される経路を表す。

(3) 第 1 行の確率を他の 3 行と比較する。正の共通因子を除くと、それぞれ

$$P_1 > P_2 \iff 6p^2 - 9p + 4 > 0,$$

$$P_1 > P_3 \iff 6p^2 - 9p + 2 < 0,$$

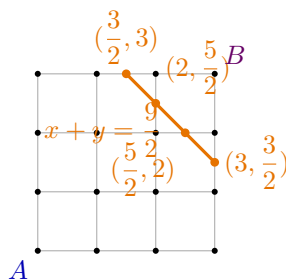
$$P_1 > P_4 \iff 2p > 1.$$

第 1 式は判別式が負なので常に成り立つ。第 2 式は

$$p > \frac{9 - \sqrt{33}}{12}$$

($0 < p < 1$) と同値であり、この下端は $1/2$ より小さい。従って 3 条件を同時に満たす範囲は

$$\frac{1}{2} < p < 1.$$



【総評】 難度 7、計算量 8。速さ比から出会い得る直線を先に決め、境界で方向が強制される経路も含めて確率を数える。4 候補の比較では正の因子だけを除き、最終条件 $1/2 < p < 1$ を得た。

【第 2 問】

平面上において、直線 l と l 上にない点 A をとる。

直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり、点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする。

直線 l 上にない点 P をとり、直線 l に関して P と対称な点 Q をとる。また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする。

このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

座標を取り、 l を x 軸、垂線の足 B を原点、 $A = (0, h)$ とする。 $P = (u, v)$ なら l に関する対称点は $Q = (u, -v)$ である。 Q を A 中心に 2θ だけ回転した点 R の座標を倍角公式で表し、 M の座標を計算する。直線 m は原点を通り方向角 θ をもつので、方程式 $y \cos \theta - x \sin \theta = 0$ を満たせばよい。最後は M をこの式に代入し、 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ で項が消えることを示す。

【解答】

座標を、直線 l が x 軸、点 B が原点、点 A が $A = (0, h)$ となるようにとる。ただし $h \neq 0$ である。このとき、直線 m は原点を通り、 x 軸となす角が θ の直線である。したがって m の方程式は $y \cos \theta - x \sin \theta = 0$ である。 $P = (u, v)$ とおく。 P は l 上にないので $v \neq 0$ である。 x 軸に関して対称な点は $Q = (u, -v)$ である。点 A から見た Q の位置ベクトルは $(u, -v - h)$ である。これを角 2θ だけ回転すると

$$(u \cos 2\theta + (v + h) \sin 2\theta, u \sin 2\theta - (v + h) \cos 2\theta)$$

である。したがって

$$R = (u \cos 2\theta + (v + h) \sin 2\theta, h + u \sin 2\theta - (v + h) \cos 2\theta)$$

である。

線分 PR の中点 $M = (X_M, Y_M)$ は $X_M = \frac{u + u \cos 2\theta + (v + h) \sin 2\theta}{2}$ $Y_M = \frac{v + h + u \sin 2\theta - (v + h) \cos 2\theta}{2}$ である。 M が m 上にあることを示すには $Y_M \cos \theta - X_M \sin \theta = 0$ を示せばよい。 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $w = v + h$ とおく。倍角公

式 $\sin 2\theta = 2sc$, $\cos 2\theta = c^2 - s^2$ を用いると

$$\begin{aligned}
 2(Y_M c - X_M s) &= \{w + 2usc - w(c^2 - s^2)\}c \\
 &\quad - \{u + u(c^2 - s^2) + 2wsc\}s \\
 &= w(1 - c^2 + s^2)c - 2ws^2c \\
 &\quad + 2usc^2 - u(1 + c^2 - s^2)s \\
 &= 2ws^2c - 2ws^2c + us(2c^2 - 1 - c^2 + s^2) \\
 &= us(c^2 + s^2 - 1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

よって $Y_M \cos \theta - X_M \sin \theta = 0$ である。したがって M は直線 m 上にある。

▶ 解法 2

【方針】

直線 l を実軸とする複素平面を使う。鏡映は共役、点 A を中心とする回転は $e^{2i\theta}$ の乗法で書ける。中点を $e^{-i\theta}$ 倍した値が実数になることを示せば、方向角 θ の直線 m 上にあると結論できる。

【解答】

直線 l を実軸、 B を原点とし、

$$A = ih \quad (h \neq 0)$$

と置く。点 P を表す複素数を z とすれば、 l に関する対称点は

$$Q = \bar{z}$$

である。

Q を A のまわりに 2θ 回転した点 R は

$$R = ih + e^{2i\theta}(\bar{z} - ih)$$

と表される。中点 M を表す複素数は

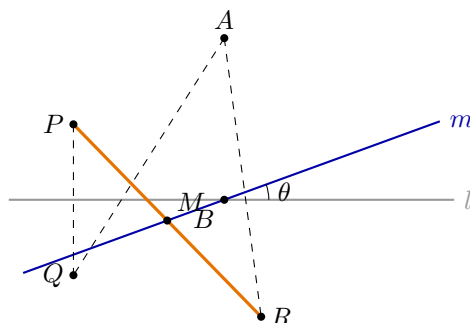
$$M = \frac{1}{2}\{z + ih + e^{2i\theta}(\bar{z} - ih)\}.$$

ここで

$$\begin{aligned}
 2e^{-i\theta}M &= e^{-i\theta}z + e^{i\theta}\bar{z} \\
 &\quad + ih(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \\
 &= 2\operatorname{Re}(e^{-i\theta}z) + 2h\sin\theta.
 \end{aligned}$$

右辺は実数である。従って $e^{-i\theta}M$ は実数、すなわち M の位置ベクトルの偏角は θ または $\theta + \pi$ である。

直線 m は原点 B を通り、実軸 l を角 θ だけ回転した直線だから、 M は m 上にある。



【総評】 難度 6、計算量 7。座標の倍角計算と、共役・複素回転を使う短い証明を併記した。中点を回転方向で逆回転した値が実数になることが、直線 m 上にあることの必要十分な表現である。

【第 3 問】

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) と双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ ($c > 0$) を考える. 点 $P(s, t)$ ($s > 0, t > 0$) を双曲線上にとり, 原点 O と点 P を結ぶ線分と楕円の交点を Q とする. 点 P における双曲線の接線が x 軸と交わる点を A , 点 Q における楕円の接線が x 軸と交わる点を B とする.

点 P を直線 PA と直線 QB が直交するようにとるとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P の座標を求めよ.
- (2) 点 A, B はそれぞれ楕円, 双曲線の焦点であることを示せ.
- (3) k を $0 < k < 1$ を満たす定数とする. a, b, c が $a^2 + c^2 = 1, a^2 - b^2 = k^2$ を満たしながら変化するとき, 直線 PA と直線 QB の交点 R の y 座標が最大となるような a, b, c を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

双曲線と楕円の接線を標準形から書き、まず x 軸との交点 A, B を求める. 点 Q は OP 上にあるので $Q = \lambda P$ と置くと、楕円の接線の式と傾きが整理しやすい. 直交条件は、直線 PA の傾きと QB の傾きの積が -1 であることから得る. これを双曲線の条件と連立して P を決める. (2) では得られた A, B の座標を焦点の公式と照合する. (3) では条件から $A = (k, 0), B = (1, 0)$ となることを使い、交点 R の y 座標を $bc(1-k)/(b^2+c^2)$ に直して、 b^2+c^2 一定のもとで bc を最大にする.

【解答】

(1) 点 Q は線分 OP 上にあるので $Q = (\lambda s, \lambda t)$ とおく. ただし $\lambda > 0$ である.

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ の点 $P(s, t)$ における接線は $\frac{sx}{a^2} - \frac{ty}{c^2} = 1$ である. これが x 軸と交わる点は、 $y = 0$ として $A = \left(\frac{a^2}{s}, 0\right)$ である. この接線、すなわち直線 PA の傾きは $\frac{sc^2}{a^2t}$ である.

一方、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の点 $Q = (\lambda s, \lambda t)$ における接線は $\frac{\lambda sx}{a^2} + \frac{\lambda ty}{b^2} = 1$ である. したがって $B = \left(\frac{a^2}{\lambda s}, 0\right)$ であり、直線 QB の傾きは $-\frac{sb^2}{a^2t}$ である.

直線 PA と QB が直交するから、2つの傾きの積は -1 である. よって $\frac{sc^2}{a^2t} \left(-\frac{sb^2}{a^2t}\right) = -1$ すなわち $s^2b^2c^2 = a^4t^2$ である. $s, t, b, c > 0$ なので $t = \frac{sbc}{a^2}$ である.

また P は双曲線上にあるから $\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{c^2} = 1$ である. ここに $t = sbc/a^2$ を代入すると $\frac{s^2}{a^2} - \frac{s^2b^2}{a^4} = 1$ であり $s^2(a^2 - b^2) = a^4$ となる. $s > 0$ より $s = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ である. したがって $t = \frac{bc}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ である. ゆえに $P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$ である.

(2) (1) より $A = \left(\frac{a^2}{s}, 0\right) = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ である. 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の焦点は $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ であるから、 A は楕円の右焦点である.

次に B を求める. $Q = \lambda P$ が楕円上にあるので $\lambda^2 \left(\frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) = 1$ である. (1) の s, t を代入すると

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2} + \frac{c^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}$$

である. よって $\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ である. したがって $B = \left(\frac{a^2}{\lambda s}, 0\right) = (\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ である. 双曲線 $x^2/a^2 - y^2/c^2 = 1$ の焦点は $(\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ であるから、 B は双曲線の右焦点である.

(3) 条件 $a^2 - b^2 = k^2, a^2 + c^2 = 1$ より、(2) の結果から $A = (k, 0), B = (1, 0)$ である. また (1) より $P = \left(\frac{a^2}{k}, \frac{bc}{k}\right)$ である. さらに $\lambda = k$ なので $Q = (a^2, bc)$ である.

直線 PA の傾きは $\frac{bc/k}{a^2/k - k} = \frac{bc}{a^2 - k^2} = \frac{c}{b}$ である. 直線 QB の傾きは $\frac{bc}{a^2 - 1} = -\frac{b}{c}$ である. 交点 R の y 座標を求め、直線 PA, QB を $y = \frac{c}{b}(x - k), y = -\frac{b}{c}(x - 1)$ と書く. これらを連立すると $\frac{c}{b}(x - k) = -\frac{b}{c}(x - 1)$ より

$c^2(x-k) = -b^2(x-1)$ であり $x = \frac{b^2 + c^2k}{b^2 + c^2}$ である。したがって

$$y = \frac{c}{b} \left(\frac{b^2 + c^2k}{b^2 + c^2} - k \right) = \frac{bc(1-k)}{b^2 + c^2}$$

である。

ここで $b^2 + c^2 = (a^2 - k^2) + (1 - a^2) = 1 - k^2$ は一定である。また $0 < k < 1$ なので $1 - k > 0$ である。したがって R の y 座標を最大にするには、 $b^2 + c^2$ 一定のもとで bc を最大にすればよい。 $(b-c)^2 \geq 0$ より $2bc \leq b^2 + c^2$ であり、等号は $b = c$ のときである。よって最大となるのは $b^2 = c^2 = \frac{1-k^2}{2}$ のときである。 $b, c > 0$ だから $b = c = \sqrt{\frac{1-k^2}{2}}$ であり、さらに $a^2 = b^2 + k^2 = \frac{1+k^2}{2}$ である。したがって求める値は $a = \sqrt{\frac{1+k^2}{2}}$, $b = c = \sqrt{\frac{1-k^2}{2}}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

双曲線上の点を $P = (a \sec \phi, c \tan \phi)$ と置く。2 接線の傾きの積を $\sin \phi$ だけの式にすると、直交条件から $\sin \phi = b/a$ が直ちに得られる。残りは焦点距離と相加相乗平均で処理する。

【解答】

(1) P を

$$P = (a \sec \phi, c \tan \phi), \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

と表す。双曲線の接線 PA の傾きは

$$\frac{sc^2}{a^2t} = \frac{c}{a \sin \phi},$$

楕円の接線 QB の傾きは

$$-\frac{sb^2}{a^2t} = -\frac{b^2}{ac \sin \phi}.$$

積が -1 だから

$$\sin^2 \phi = \frac{b^2}{a^2}.$$

従って $\sin \phi = b/a$ であり、

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

ゆえに

$$P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right).$$

(2) 双曲線接線の x 切片は

$$A = \left(\frac{a^2}{s}, 0 \right) = \left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0 \right),$$

すなわち楕円の右焦点である。

$Q = \lambda P$ とすると、楕円の式から

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

従って楕円接線の x 切片は

$$B = \left(\frac{a^2}{\lambda s}, 0 \right) = \left(\sqrt{a^2 + c^2}, 0 \right),$$

すなわち双曲線の右焦点である。

(3) 条件から

$$A = (k, 0), \quad B = (1, 0),$$

また

$$P = \left(\frac{a^2}{k}, \frac{bc}{k} \right), \quad Q = (a^2, bc).$$

2 接線は

$$y = \frac{c}{b}(x - k), \quad y = -\frac{b}{c}(x - 1)$$

だから、交点 R の y 座標は

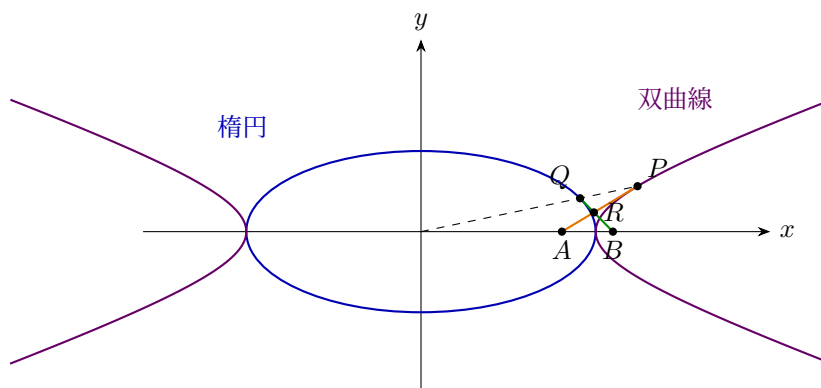
$$y_R = \frac{bc(1 - k)}{b^2 + c^2}.$$

ここで

$$b^2 + c^2 = 1 - k^2$$

は一定である。相加相乗平均より bc は $b = c$ のとき最大となる。従って

$$a = \sqrt{\frac{1 + k^2}{2}}, \quad b = c = \sqrt{\frac{1 - k^2}{2}}.$$



【総評】 難度 8、計算量 8。接線の傾き、焦点、パラメータ最大化が連鎖する長問である。双曲線の三角関数表示により直交条件を簡潔にし、最後は $b^2 + c^2 = 1 - k^2$ を固定して等号条件まで確定した。

【第 4 問】

a は実数とする。曲線 $y = e^x$ 上の各点における法線のうちで、点 $P(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。 $n(a)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線上の接点を (t, e^t) とおき、その法線が $P(a, 3)$ を通る条件を $a = F(t)$ の形に直す。法線の傾きは接線の傾き e^t の負の逆数なので $-e^{-t}$ である。あとは、実数 t に対して $F(t) = a$ の解の個数を数えればよい。 $F'(t) = (e^t - 1)(2e^t - 1)$ から増減表を作り、極大値 $-\log 2 - 5/4$ と極小値 -2 の大小を確認して、水平線との交点数を分類する。

【解答】

曲線 $y = e^x$ 上の接点を (t, e^t) とおく。この点における接線の傾きは e^t であるから、法線の傾きは $-e^{-t}$ である。したがって法線の方程式は $y - e^t = -e^{-t}(x - t)$ である。

この法線が点 $P(a, 3)$ を通る条件は $3 - e^t = -e^{-t}(a - t)$ である。両辺に e^t を掛けると $3e^t - e^{2t} = -(a - t)$ であり、整理して $a = t - 3e^t + e^{2t}$ を得る。

そこで $F(t) = t - 3e^t + e^{2t}$ とおく。求める $n(a)$ は、方程式 $F(t) = a$ の実数解の個数である。

微分すると $F'(t) = 1 - 3e^t + 2e^{2t} = (e^t - 1)(2e^t - 1)$ である。したがって臨界点は $e^t = \frac{1}{2}$, $e^t = 1$ すなわち $t = -\log 2$, $t = 0$ である。 $F'(t)$ の符号は、 $t < -\log 2$ で正、 $-\log 2 < t < 0$ で負、 $0 < t$ で正である。よって F は $t = -\log 2$ で極大、 $t = 0$ で極小をとる。

その値は $F(-\log 2) = -\log 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = -\log 2 - \frac{5}{4}$ であり $F(0) = 0 - 3 + 1 = -2$ である。また

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$$

である。さらに $-\log 2 - \frac{5}{4} > -2$ である。

以上の増減から、水平線 $y = a$ との交点数は次のように決まる。

$$n(a) = \begin{cases} 1 & (a < -2), \\ 2 & (a = -2), \\ 3 & \left(-2 < a < -\log 2 - \frac{5}{4}\right), \\ 2 & \left(a = -\log 2 - \frac{5}{4}\right), \\ 1 & \left(-\log 2 - \frac{5}{4} < a\right). \end{cases}$$

これが求める個数である。

▶ 解法 2

【方針】

接点と P との距離の 2 乗を $G(t)$ と置き、法線条件を $G'(t) = 0$ として導く。得られる $a = F(t)$ のグラフを、2 つの臨界点と無限遠での極限から描き、水平線との交点数を数える。

【解答】

接点を (t, e^t) とする。P までの距離の 2 乗は

$$G(t) = (t - a)^2 + (e^t - 3)^2.$$

曲線の接線と P への線分が直交する条件は

$$G'(t) = 0$$

である。従って

$$2(t - a) + 2e^t(e^t - 3) = 0,$$

すなわち

$$a = F(t) := t - 3e^t + e^{2t}.$$

$$F'(t) = (e^t - 1)(2e^t - 1)$$

だから、 F は

$$t = -\log 2$$

で極大、

$$t = 0$$

で極小となる。その値は

$$F(-\log 2) = -\log 2 - \frac{5}{4}, \quad F(0) = -2.$$

また

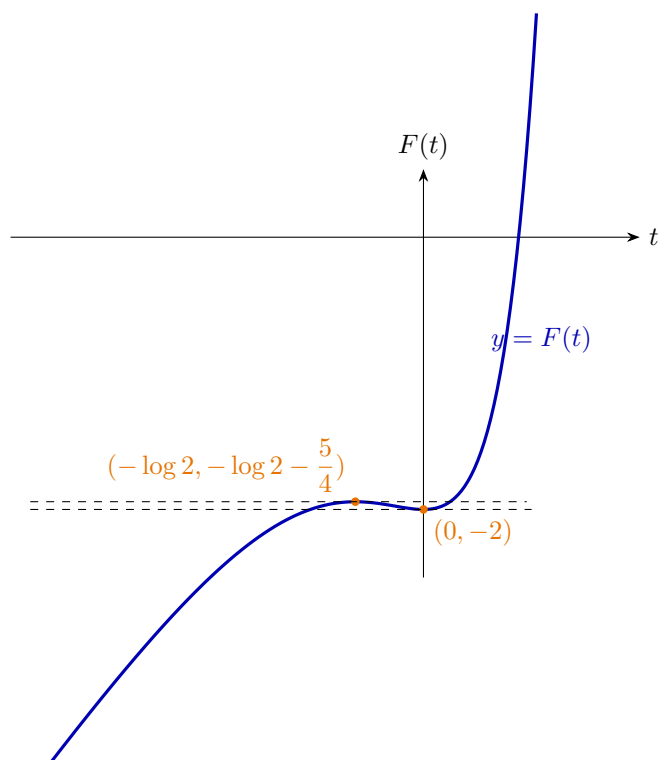
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty,$$

かつ

$$-2 < -\log 2 - \frac{5}{4}.$$

従って水平線 $y = a$ との交点数は

$$n(a) = \begin{cases} 1 & (a < -2), \\ 2 & (a = -2), \\ 3 & \left(-2 < a < -\log 2 - \frac{5}{4}\right), \\ 2 & \left(a = -\log 2 - \frac{5}{4}\right), \\ 1 & \left(a > -\log 2 - \frac{5}{4}\right). \end{cases}$$



【総評】 難度 7、計算量 6。法線の本数を 1 変数関数と水平線の交点数へ変換する。極大値が極小値より大きいこと、両無限遠の極限、臨界値で接する場合をそろえて 5 区間の答えを完成させた。

【第 5 問】

関数 $f(\theta) = \sqrt{2} \sin^2 \theta + \cos \theta$ に対し、次の条件を満たす正の数 a を考える。

$$\begin{cases} |\theta| < a \text{ ならば } f(\theta) > 0 \\ |\theta| = a \text{ ならば } f(\theta) = 0 \end{cases}$$

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C を媒介変数 θ ($-a \leq \theta \leq a$) を用いて

$$C: \begin{cases} x = f(\theta) \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

で定める。 x 軸に平行な直線 $y = t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の範囲を求め、共有点の x 座標を t で表せ。

- (3) 曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $c = \cos \theta$ と置いて零点を求める。(2) は $\sin \theta = t$ の解を、余弦が正の枝と負の枝に分ける。特に区間 $[-3\pi/4, 3\pi/4]$ では t の全範囲が $[-1, 1]$ であることに注意する。(3) は中央部分を円板、上下の張り出しを同じ面積の円環として、3 区間の断面積を積分する。

【解答】

- (1) $c = \cos \theta$ と置くと

$$f(\theta) = \sqrt{2}(1 - c^2) + c.$$

従って $f(\theta) = 0$ は

$$\sqrt{2}c^2 - c - \sqrt{2} = 0$$

と同値であり、 $-1 \leq c \leq 1$ を満たす解は

$$c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

だけである。 $f(0) = 1 > 0$ で f は偶関数だから

$$a = \frac{3\pi}{4}.$$

(2)

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

における $\sin \theta$ の値域は

$$-1 \leq t \leq 1$$

である。共有点では

$$x = \sqrt{2}t^2 + \cos \theta$$

だから、 $\cos \theta$ の符号により次のように分かれる。

$$\begin{cases} \sqrt{2}t^2 \pm \sqrt{1-t^2} & \left(-1 \leq t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \sqrt{2}t^2 + \sqrt{1-t^2} & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \sqrt{2}t^2 \pm \sqrt{1-t^2} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1\right). \end{cases}$$

端点 $t = \pm 1$ では複号の 2 値は一致する。

(3)

$$x_+(t) = \sqrt{2}t^2 + \sqrt{1-t^2}, \quad x_-(t) = \sqrt{2}t^2 - \sqrt{1-t^2}$$

と置く。中央の

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

では円板、下側

$$-1 \leq t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

と上側

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$$

では円環になる。上下の円環は対称だから

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} x_+(t)^2 dt \\ &\quad + 2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \{x_+(t)^2 - x_-(t)^2\} dt. \end{aligned}$$

中央の積分は

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} x_+(t)^2 dt = \frac{14\sqrt{2}}{15} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8},$$

また各円環について

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \{x_+(t)^2 - x_-(t)^2\} dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

従って

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\frac{14\sqrt{2}}{15} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi(112 + 45\pi)}{120}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は余弦の符号で枝を分ける。(3) では $x_{\pm}(t)$ を展開して積分する代わりに、境界曲線を媒介変数のまま使う。

$$\pi \int x^2 dy$$

を中央の円板と上下 2 つの円環へ向き付きで分け、1 つの原始関数で評価する。

【解答】

(1)

$$f(\theta) = 0 \iff \sqrt{2} \cos^2 \theta - \cos \theta - \sqrt{2} = 0.$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ での解は

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

だから

$$a = \frac{3\pi}{4}.$$

(2) $-3\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ で

$$-1 \leq t = \sin \theta \leq 1.$$

$\cos \theta = \pm \sqrt{1-t^2}$ より

$$x = \sqrt{2}t^2 \pm \sqrt{1-t^2}.$$

負の枝も区間内にあるのは

$$-1 \leq t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$$

である。中央では正の枝だけである。

(3) $y = \sin \theta$ だから

$$dy = \cos \theta d\theta.$$

境界を向き付きでたどると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\theta)^2 \cos \theta d\theta \\ &+ 2 \left\{ \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(\theta)^2 \cos \theta d\theta - \int_{3\pi/4}^{\pi/2} f(\theta)^2 \cos \theta d\theta \right\}. \end{aligned}$$

原始関数として

$$\begin{aligned} H(\theta) &= \frac{2}{5} \sin^5 \theta + \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} \theta - \frac{\sqrt{2}}{16} \sin 4\theta \end{aligned}$$

を取れる。従って中央部分は

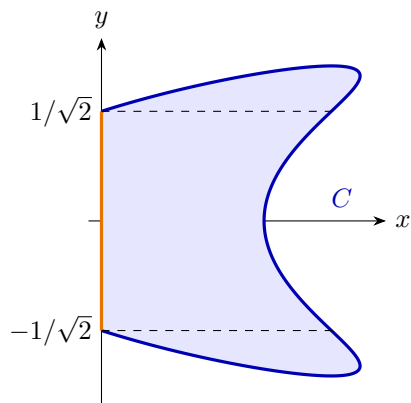
$$H(\pi/4) - H(-\pi/4) = \frac{14\sqrt{2}}{15} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8},$$

各円環は

$$H(3\pi/4) - H(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

よって

$$V = \frac{\sqrt{2}\pi(112 + 45\pi)}{120}.$$



【総評】 難度 8、計算量 9。媒介区間では $\sin \theta$ が $[-1, 1]$ を動き、上下の張り出しがともに円環断面を作る。既存答案で欠落していた下側円環を補い、水平断面法と向き付き境界積分の 2 通りで体積を一致させた。