

大阪大学 1998 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$\triangle ABC$ において, 3 辺の長さを $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とする.

辺 AB を n 等分した点を, A に近い方から順に $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とし, P_n を B とする. 同様に, 辺 BC , CA を n 等分した点をそれぞれ, B に近い方から順に $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$, および C に近い方から順に $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ とし, Q_n を C , R_n を A とする.

- (1) $k = 1, 2, \dots, n$ について $|\overrightarrow{P_k Q_k}|^2$ を n , k と a , c および内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ を用いて表せ.
- (2) $|\overrightarrow{P_k Q_k}|^2 + |\overrightarrow{Q_k R_k}|^2 + |\overrightarrow{R_k P_k}|^2$ を n , k と a , b , c で表せ.
- (3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\overrightarrow{P_k Q_k}|^2 + |\overrightarrow{Q_k R_k}|^2 + |\overrightarrow{R_k P_k}|^2)$$

を a , b , c で表せ.

▶ 解法 1

【方針】

各頂点を原点にして内分点の位置ベクトルを表す。(2) は 3 頂点で得る式を巡回的に足し、余弦定理に相当する内積表示で交差項を辺長だけに直す。(3) は平方和の公式を用いる。

【解答】

(1) 点 B を原点とし

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$$

とおく。定義から

$$\overrightarrow{BP_k} = \frac{n-k}{n} \mathbf{u}, \quad \overrightarrow{BQ_k} = \frac{k}{n} \mathbf{v}.$$

従って

$$\overrightarrow{P_k Q_k} = \frac{k}{n} \mathbf{v} - \frac{n-k}{n} \mathbf{u}$$

であり、

$$|\overrightarrow{P_k Q_k}|^2 = \frac{k^2 a^2 + (n-k)^2 c^2 - 2k(n-k) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{n^2}.$$

(2) 同じ式を 3 頂点で巡回的に用いる。3 つの交差項に現れる内積の和は

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \end{aligned}$$

従って、求める和は

$$\frac{(n-k)^2 + k^2 - k(n-k)}{n^2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

すなわち

$$\frac{n^2 - 3nk + 3k^2}{n^2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

(3) $T = a^2 + b^2 + c^2$ とおくと、求める式は

$$\frac{T}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{3k}{n} + \frac{3k^2}{n^2} \right).$$

和の公式を用いて

$$T \left[1 - \frac{3(n+1)}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \right]$$

となる。従って極限は

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

3 辺上の点を各頂点からの内分ベクトルで統一して表す。(2) では余弦定理で 3 つの内積の和だけを辺長へ変換し、(3) は有限和を割った式の各項の極限を取る。

【解答】

(1) B を原点とし

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$

とおく。定義から

$$\overrightarrow{BP_k} = \frac{n-k}{n}\vec{u}, \quad \overrightarrow{BQ_k} = \frac{k}{n}\vec{v}.$$

従って

$$\overrightarrow{P_kQ_k} = \frac{k}{n}\vec{v} - \frac{n-k}{n}\vec{u}$$

であり、

$$|\overrightarrow{P_kQ_k}|^2 = \frac{k^2a^2 + (n-k)^2c^2 - 2k(n-k)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{n^2}.$$

(2) 同じ計算を 3 頂点で行う。余弦定理より

$$2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - a^2.$$

3 式を加えると内積の和は $(a^2 + b^2 + c^2)/2$ である。従って求める和は

$$\frac{k^2 + (n-k)^2 - k(n-k)}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

すなわち

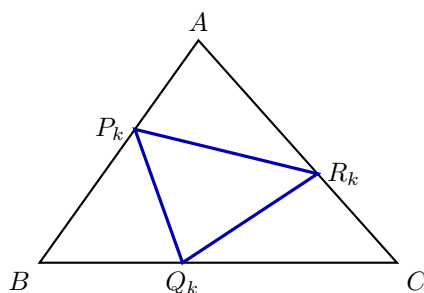
$$\frac{n^2 - 3nk + 3k^2}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(3) $T = a^2 + b^2 + c^2$ とおくと、求める量は

$$T \left\{ 1 - \frac{3(n+1)}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} \right\}.$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\overrightarrow{P_kQ_k}|^2 + |\overrightarrow{Q_kR_k}|^2 + |\overrightarrow{R_kP_k}|^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$



【総評】 難度 5、計算量 5。3 本のベクトルを個別計算した後、内積の和が辺長二乗和の半分になることを使うと整理できる。各内分点の向きを定義どおり確認し、極限は平方和の公式を用いて端点を含む有限和から厳密に導いた。

【第 2 問】

- (1) $\cos 3\theta = f(\cos \theta)$, $\cos 4\theta = g(\cos \theta)$ となる 3 次式 $f(x)$ と 4 次式 $g(x)$ を求めよ。
 (2) $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ とする。 $\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ を示し、整数を係数にもつ 3 次式 $P(x)$ で $P(\cos \alpha) = 0$ となるものを 1 つ求めよ。
 (3) $0.6 < \cos \frac{2\pi}{7} < 0.7$ であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

倍角公式を反復して f, g を得る。 $f(x) = g(x)$ の 4 次式から自明な因子 $x - 1$ を除き 3 次式 P を作る。(3) は P の単調性と $0.6, 0.7$ での符号を使う。

【解答】

(1) 倍角・加法公式から

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta, \\ \cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1.\end{aligned}$$

従って

$$f(x) = 4x^3 - 3x, \quad g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

(2) $3\alpha = 6\pi/7$ であり、

$$4\alpha = \frac{8\pi}{7} = 2\pi - \frac{6\pi}{7}$$

だから $\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ である。 $x = \cos \alpha$ とおくと $f(x) = g(x)$ より

$$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0.$$

左辺は

$$(x - 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$$

と因数分解できる。 $\cos \alpha \neq 1$ だから

$$P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

とすれば $P(\cos \alpha) = 0$ である。

(3) $0 < 2\pi/7 < \pi/3$ だから

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{2\pi}{7} < 1.$$

一方

$$P'(x) = 24x^2 + 8x - 4.$$

$x \geq 1/2$ では $P'(x) > 0$ なので、 P は $[1/2, 1]$ で狭義増加する。また

$$P\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{29}{125} < 0, \quad P\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{113}{125} > 0.$$

$[1/2, 1]$ にある P の零点はただ 1 つで、それが $\cos(2\pi/7)$ だから

$$0.6 < \cos \frac{2\pi}{7} < 0.7.$$

▶ 解法 2

【方針】

$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x)$ という余弦の漸化式から 3 倍角・4 倍角を作る。(3) は $y = 2 \cos \alpha$ として三次式を簡単化し、区間 $[1, 2]$ の単調性と $6/5, 7/5$ の符号で挟む。

【解答】

(1)

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x)$$

と定める。加法定理より $x = \cos \theta$ のとき

$$T_m(x) = \cos m\theta$$

である。漸化式を順に計算すると

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

従って

$$f(x) = 4x^3 - 3x, \quad g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

(2) $\alpha = 2\pi/7$ なら

$$3\alpha = \frac{6\pi}{7}, \quad 4\alpha = 2\pi - \frac{6\pi}{7},$$

よって $\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ である。 $x = \cos \alpha$ として $f(x) = g(x)$ を整理すると

$$(x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0.$$

$x \neq 1$ だから

$$P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

とすればよい。

(3) $y = 2x$ とおくと $P(x) = 0$ は

$$h(y) = y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

となる。 $0 < \alpha < \pi/3$ より $1 < y < 2$ である。この区間では

$$h'(y) = 3y^2 + 2y - 2 > 0$$

だから h は狭義増加する。また

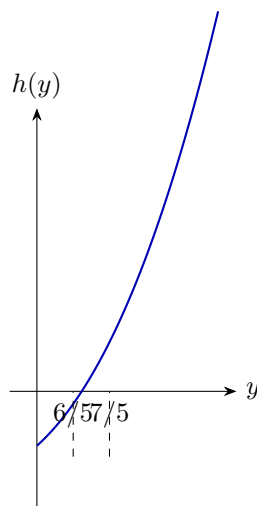
$$h\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{29}{125} < 0, \quad h\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{113}{125} > 0.$$

従って

$$\frac{6}{5} < 2 \cos \frac{2\pi}{7} < \frac{7}{5},$$

すなわち

$$0.6 < \cos \frac{2\pi}{7} < 0.7.$$



【総評】 難度 5、計算量 4。3 次式を得る際に余分な自明解を除く。最後は対象の余弦が 2 分の 1 より大きいことを角の大小から先に押さえ、三次式が狭義増加する区間内で 2 つの有理数における符号を比較して挟んだ。

【第 3 問】

$f_0(x) = x^2 e^x$ とし、関数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ を

$$f_1(x) = f_0'(x), f_2(x) = f_1'(x), \dots, f_n(x) = f_{n-1}'(x), \dots$$

と定義する。

(1) $n \geq 1$ について、整数 p_n, q_n を用いて

$$f_n(x) = (x^2 + p_n x + q_n) e^x$$

の形に表せることを示せ。また、 p_n, q_n を求めよ。

(2) $n \geq 1$ のとき、 $y = f_n(x)$ の増減、凹凸を調べ、グラフの概形をかけ。

(3) $n \geq 1$ のとき、3 曲線

$$y = f_n(x), \quad y = f_{n+1}(x), \quad y = f_{n+2}(x)$$

で囲まれた図形の面積 S_n を n で表せ。

(4) 無限級数 $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$ の和を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

微分の積の公式から f_n の一般形を得る。増減は $f'_n = f_{n+1}$ 、凹凸は $f''_n = f_{n+2}$ の二次因子で判定する。3 曲線の交点を求め、区間を 2 つに分けて差を積分する。

【解答】

(1) 積の微分を繰り返すと、 x^2 は 3 回以上微分すると 0 になるから

$$f_n(x) = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)) = e^x ((x+n)^2 - n).$$

実際、この式を微分すると n を $n+1$ に替えた式になり、 $n=0$ でも成立する。従って

$$p_n = 2n, \quad q_n = n(n-1).$$

(2)

$$f'_n(x) = f_{n+1}(x) = e^x ((x+n+1)^2 - (n+1)).$$

従って

$$\alpha = -n-1-\sqrt{n+1}, \quad \beta = -n-1+\sqrt{n+1}$$

とおくと、 $(-\infty, \alpha)$ と (β, ∞) で増加、 (α, β) で減少する。

また

$$f''_n(x) = f_{n+2}(x) = e^x ((x+n+2)^2 - (n+2)).$$

従って

$$\gamma = -n-2-\sqrt{n+2}, \quad \delta = -n-2+\sqrt{n+2}$$

とおくと、 $(-\infty, \gamma)$ と (δ, ∞) で下に凸、 (γ, δ) で上に凸である。さらに

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty,$$

零点は $x = -n \pm \sqrt{n}$ である。これらと増減・凹凸を用いて概形が定まる。

(3) $t = x + n$ とおくと

$$\begin{aligned} f_n &= e^{t-n}(t^2 - n), \\ f_{n+1} &= e^{t-n}(t^2 + 2t - n), \\ f_{n+2} &= e^{t-n}(t^2 + 4t + 2 - n). \end{aligned}$$

従って各 2 曲線の交点の x 座標は

$$f_{n+1} = f_{n+2} : t = -1, \quad f_n = f_{n+2} : t = -\frac{1}{2}, \quad f_n = f_{n+1} : t = 0.$$

囲まれた領域では、 $-1 \leq t \leq -1/2$ で上側が f_{n+2} 、下側が f_{n+1} 、 $-1/2 \leq t \leq 0$ で上側が f_n 、下側が f_{n+1} である。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-1}^{-1/2} 2(t+1)e^{t-n} dt + \int_{-1/2}^0 (-2t)e^{t-n} dt \\ &= 2e^{-n} \left(1 - 2e^{-1/2} + e^{-1} \right) \\ &= 2e^{-n} (1 - e^{-1/2})^2. \end{aligned}$$

(4) 従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2(1 - e^{-1/2})^2 \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} + 1}.$$

▶ 解法 2

【方針】

積の微分から係数 p_n, q_n の漸化式を作って一般形を帰納的に得る。面積は $t = x + n$ で交点を固定し、隣接する導関数の差の原始関数を利用して 2 区間を計算する。

【解答】

(1)

$$f_n(x) = (x^2 + p_n x + q_n)e^x$$

と仮定して微分すると

$$f_{n+1}(x) = \{x^2 + (p_n + 2)x + (q_n + p_n)\}e^x.$$

従って

$$p_{n+1} = p_n + 2, \quad q_{n+1} = q_n + p_n,$$

$p_0 = q_0 = 0$ である。これを帰納的に解いて

$$p_n = 2n, \quad q_n = n(n-1).$$

よって

$$f_n(x) = \{(x+n)^2 - n\}e^x.$$

(2)

$$f'_n = f_{n+1}, \quad f''_n = f_{n+2}.$$

従って極値を与える点は

$$x = -n - 1 \pm \sqrt{n+1},$$

変曲点は

$$x = -n - 2 \pm \sqrt{n+2}.$$

前者の 2 点の外側で増加、内側で減少し、後者の 2 点の外側で下に凸、内側で上に凸である。また

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty,$$

零点は $x = -n \pm \sqrt{n}$ である。これらから概形が定まる。

(3) $t = x + n$ とおく。3 曲線の交点は

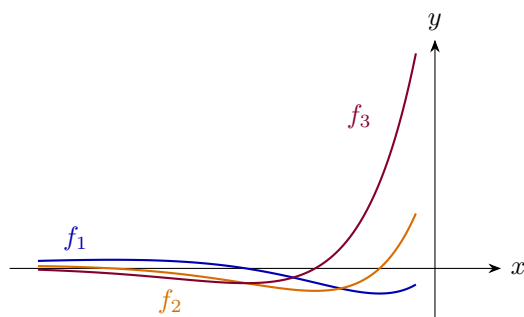
$$t = -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0$$

である。囲まれた面積は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-1}^{-1/2} 2(t+1)e^{t-n} dt + \int_{-1/2}^0 (-2t)e^{t-n} dt \\ &= [2te^{t-n}]_{-1}^{-1/2} + [2(1-t)e^{t-n}]_{-1/2}^0 \\ &= 2e^{-n} (1 - e^{-1/2})^2. \end{aligned}$$

(4) 従って等比級数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 2(1 - e^{-1/2})^2 \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{2}{e} \cdot \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} + 1}.\end{aligned}$$



【総評】 難度 8、計算量 8。導関数列そのものを増減・凹凸判定に再利用する。零点、極値、変曲点、両端での極限をそろえて概形を確定し、3 曲線の上下関係を交点ごとに確認して面積の符号を固定した上で積分した。