

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 1998 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．また、2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という．次の問に答えよ．

- (1) 点 $P(630, 5400)$ を通る直線 $y = ax$ (a は定数) は $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか．
- (2) n を 2 以上の整数とする．点 $P(630, 5400)$ を通る曲線 $y = bx^n$ (b は n により定まる定数) は、 $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか．

第 2 問

n を 1 以上の整数とする. n 次の整式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とその導関数 $f'(x)$ の間に $nf(x) = (x+p)f'(x)$ という関係があるとする. ただし, p は定数である. このとき, $f(x) = a_0(x+p)^n$ であることを示せ.

第 3 問

- (1) a を 1 より大きい実数とする. 0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log 2 + \frac{x}{2} \log a \leq \log(1 + a^x) \leq \log 2 + \frac{x}{2} \log a + \frac{x^2}{8} (\log a)^2$$

ただし, 対数は自然対数である.

- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n = \left(\frac{1 + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n$ とおく. (1) の不等式を用いて極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ.

第 4 問

平面上において，7点 A, P, Q, R, S, R', S' を右図のようにとる．ただし，

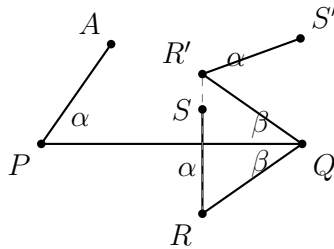
$$AP = a, \quad PQ = b, \quad QR = QR' = c, \quad RS = R'S' = d,$$

$$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\angle RQP = \angle PQR' = \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

である．このとき， $AS^2 - AS'^2$ を $\sin \alpha$ ， $\sin \beta$ および a, b, c, d を用いて表せ．

参考図（原資料の「右図」を条件から再構成）



第 5 問

座標空間において、

平面 $z = \sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$, 中心 $(0, 0, \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z = -\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$, 中心 $(0, 0, -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする. また, 空間内の点 $P(x, y, z)$ に対し, 円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m , 円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする. 次の問いに答えよ.

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくとき, m と M を r および z で表せ.

(2) $|M - 2\sqrt{6}| \geq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする. 図形 H の体積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)