

大阪大学 1998 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問に答えよ。

- (1) 点 $P(630, 5400)$ を通る直線 $y = ax$ (a は定数) は $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。
 (2) n を 2 以上の整数とする。点 $P(630, 5400)$ を通る曲線 $y = bx^n$ (b は n により定まる定数) は、 $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

▶ 解法 1

【方針】

格子辺は格子点を除いた単位の縦横線分なので、曲線が縦の格子線または横の格子線を格子点以外で通過した回数を数える。格子点を通ると、その点自体は格子辺に含まれないため、縦線・横線の両方の数え上げから除く。(1) は直線上の内部格子点数を $(630, 5400) = 90(7, 60)$ から求める。(2) は内部の整数 x で y も整数になる点数 N を、既約分母 w の n 乗が 5400 を割る条件で分類する。

【解答】

(1) 点 $P(630, 5400)$ を通る直線 $y = ax$ は原点も通るので $a = \frac{5400}{630} = \frac{60}{7}$ である。したがって直線は $y = \frac{60}{7}x$ である。 $0 < x < 630$ の範囲にある縦の格子線は $x = 1, 2, \dots, 629$ の 629 本である。また $0 < y < 5400$ の範囲にある横の格子線は $y = 1, 2, \dots, 5399$ の 5399 本である。

ただし、直線が格子点を通る場合、その点は格子辺から除かれているので、縦の格子辺との交点にも横の格子辺との交点にも数えない。直線上の内部格子点を数える。 $(630, 5400) = 90(7, 60)$ であり、7 と 60 は互いに素であるから、原点と P の間の格子点は $(7, 60), (14, 120), \dots, (623, 5340)$ の 89 個である。

よって縦の格子辺と交わる回数は $629 - 89$ 、横の格子辺と交わる回数は $5399 - 89$ である。したがって求める個数は $(629 - 89) + (5399 - 89) = 5850$ である。

(2) 曲線 $y = bx^n$ が点 $P(630, 5400)$ を通るので $5400 = b \cdot 630^n$ であり、 $y = 5400 \left(\frac{x}{630}\right)^n$ である。この曲線は $0 \leq x \leq 630$ で単調に増加するので、縦格子線と横格子線をそれぞれ 1 回ずつ横切る。ただし内部格子点を通る場合は、(1) と同じく縦・横の両方から除く。

内部の格子点数を N とする。縦格子線は 629 本、横格子線は 5399 本なので、求める個数は $629 + 5399 - 2N = 6028 - 2N$ である。

内部格子点を数える。 $0 < x < 630$ で整数 x をとり、 $\frac{x}{630} = \frac{v}{w}$ と既約分数で表す。すると $1 \leq v < w$ 、 w は 630 の約数である。曲線上の y 座標は $y = 5400 \frac{v^n}{w^n}$ である。 v と w は互いに素なので、 y が整数であるための条件は w^n が 5400 を割り切るである。

素因数分解すると $5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ である。 $n = 2$ のとき、 $w^2 \mid 5400$ となる w は 30 の約数である。このとき可能な既約分数 v/w は、 $1/30, 2/30, \dots, 29/30$ を既約化して得られるものすべてであり、個数は 29 個である。したがって $N = 29$ で、交わる格子辺の個数は $6028 - 2 \cdot 29 = 5970$ である。 $n = 3$ のとき、 $w^3 \mid 5400$ となる w は 6 の約数である。同様に、可能な既約分数は $1/6, 2/6, \dots, 5/6$ を既約化して得られる 5 個である。したがって $N = 5$ で、交わる格子辺の個数は $6028 - 2 \cdot 5 = 6018$ である。 $n \geq 4$ のとき、 $w^n \mid 5400$ を満たす $w > 1$ は存在しない。したがって内部格子点はなく、 $N = 0$ である。よって交わる格子辺の個数は 6028 である。

以上より、答えは

$$\begin{cases} 5970 & (n = 2), \\ 6018 & (n = 3), \\ 6028 & (n \geq 4) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

単調曲線が横切る内部の縦格子線 629 本と横格子線 5399 本を先に数える。曲線上の内部格子点では格子辺と交わらないので 2 回ずつ差し引き、既約分母 w の条件 $w^n \mid 5400$ から内部格子点数を分類する。

【解答】

(1) 原点と $P(630, 5400)$ の間にある内部格子点の個数は

$$\gcd(630, 5400) - 1 = 90 - 1 = 89$$

である。直線は内部の縦格子線 629 本、横格子線 5399 本をそれぞれ 1 回横切るが、内部格子点は格子辺の端点であって格子辺には含まれない。従ってその 89 点では縦・横の両方を除き、

$$629 + 5399 - 2 \cdot 89 = 5850$$

個である。

(2) 曲線は

$$y = 5400 \left(\frac{x}{630} \right)^n$$

で、区間内で狭義増加する。内部格子点数を N_n とすれば、同じ理由で交わる格子辺数は

$$6028 - 2N_n$$

である。

$x/630 = v/w$ を既約分数で表す。 y が整数となる必要十分条件は

$$w^n \mid 5400$$

である。

$$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

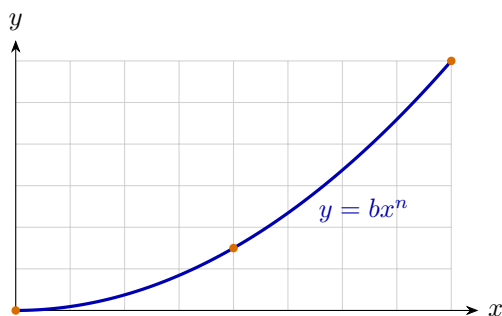
$n = 2$ では可能な分母は 30 の約数であり、区間 $(0, 1)$ の異なる既約分数は

$$\frac{1}{30}, \frac{2}{30}, \dots, \frac{29}{30}$$

を既約化して得られる 29 個である。従って $N_2 = 29$ 。

$n = 3$ では可能な分母は 6 の約数で、同様に $N_3 = 5$ である。 $n \geq 4$ では $w > 1$ は存在せず、 $N_n = 0$ となる。よって答えは

$$\begin{cases} 5970 & (n = 2), \\ 6018 & (n = 3), \\ 6028 & (n \geq 4). \end{cases}$$



【総評】 格子辺の定義を正確に扱う数え上げ問題で、想定時間は 28 分程度。曲線や直線が格子点を通ると、その点は格子辺の端点であって格子辺そのものには含まれないため、縦・横の両方から除く必要がある。(2) では、 $y = 5400(x/630)^n$ として内部格子点だけを分類するのが中心で、既約分母 w に対して $w^n \mid 5400$ が必要十分になる理由を丁寧に書きたい。 $n = 2, 3, n \geq 4$ で分母の候補が急に減る点がこの問題の山である。

【第 2 問】

n を 1 以上の整数とする. n 次の整式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とその導関数 $f'(x)$ の間に $nf(x) = (x+p)f'(x)$ という関係があるとする. ただし, p は定数である. このとき, $f(x) = a_0(x+p)^n$ であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

まず $a_0(x+p)^n$ が同じ微分関係式を満たすことを確認し, 差 $F(x) = f(x) - a_0(x+p)^n$ を作る. 差は次数が $n-1$ 以下で, しかも同じ関係式 $nF = (x+p)F'$ を満たす. もし F が零でなければ, 最高次項を比較すると次数が n でなければならず, 次数 $n-1$ 以下であることと矛盾する.

【解答】

$g(x) = a_0(x+p)^n$ とおく. このとき $g'(x) = na_0(x+p)^{n-1}$ であるから $(x+p)g'(x) = na_0(x+p)^n = ng(x)$ である. したがって $g(x)$ も, 与えられた関係式と同じ $ng(x) = (x+p)g'(x)$ を満たす.

そこで $F(x) = f(x) - g(x)$ とおく. f と g はどちらも最高次係数が a_0 の n 次式であるから, F は零多項式であるか, 次数が $n-1$ 以下の多項式である. また, f と g の関係式を引き算すると $nF(x) = (x+p)F'(x)$ が成り立つ.

ここで F が零多項式でないと仮定する. F の次数を m とし, 最高次の項を cx^m ($c \neq 0$) とする. すると左辺 $nF(x)$ の最高次の項は ncx^m である. 一方, $F'(x)$ の最高次の項は $m cx^{m-1}$ なので, 右辺 $(x+p)F'(x)$ の最高次の項は $m cx^m$ である.

両辺が等しいためには, 最高次の係数が等しくなければならない. すなわち $nc = mc$ である. $c \neq 0$ より $n = m$ を得る. しかし F の次数は $n-1$ 以下だったので, これは矛盾である. したがって F は零多項式である.

よって $f(x) = g(x) = a_0(x+p)^n$ である.

▶ 解法 2

【方針】

整式の係数を直接比較する. x^{n-k} の係数から $ka_k = p(n-k+1)a_{k-1}$ を得て, 数学的帰納法で $a_k = {}_nC_k a_0 p^k$ と決定し, 二項展開へ戻す.

【解答】

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n$$

とする. 関係式

$$nf(x) = (x+p)f'(x)$$

の x^{n-k} の係数を比較する.

左辺の係数は na_k である. 右辺では $xf'(x)$ から $(n-k)a_k$, $pf'(x)$ から $p(n-k+1)a_{k-1}$ が現れる. 従って

$$na_k = (n-k)a_k + p(n-k+1)a_{k-1},$$

すなわち

$$ka_k = p(n-k+1)a_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n).$$

これを順に用いると

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} a_0 p^k \\ &= {}_nC_k a_0 p^k. \end{aligned}$$

従って二項展開により

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \{x^n + {}_nC_1 p x^{n-1} + \cdots + {}_nC_k p^k x^{n-k} + \cdots + p^n\} \\ &= a_0(x+p)^n. \end{aligned}$$

これで係数がすべて一意に決まり, 所要の形が示された.

【総評】 微分関係式を整式の次数で処理する証明問題で、想定時間は 12 分程度。 $a_0(x+p)^n$ という候補を先に作り、差を取って最高次項の矛盾に持ち込むのが最短である。商 $f/(x+p)^n$ を微分する方法も考えられるが、多項式としての議論では最高次項比較の方が端点や $x = -p$ の扱いを気にせずに済む。証明では $a_0 \neq 0$ と F の次数が $n-1$ 以下になる理由を明確にしておきたい。

【第 3 問】

- (1) a を 1 より大きい実数とする. 0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log 2 + \frac{x}{2} \log a \leq \log(1+a^x) \leq \log 2 + \frac{x}{2} \log a + \frac{x^2}{8} (\log a)^2$$

ただし、対数は自然対数である.

- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく. (1) の不等式を用いて極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$t = x \log a$ とおいて、問題を $\log(1+e^t)$ の評価に直す。下側は $1+e^t \geq 2e^{t/2}$ から従う。上側は $F(t) = \log(1+e^t) - \log 2 - t/2$ とおき、 $F(0) = F'(0) = 0$ 、さらに $0 \leq F''(t) \leq 1/4$ を使って 2 回積分する形で $F(t) \leq t^2/8$ を示す。(2) では $a = 3, x = 1/n$ として $\log a_n$ をはさみうちする。

【解答】

(1) $t = x \log a$ とおく。 $a > 1, x \geq 0$ なので $t \geq 0$ である。また $a^x = e^t$ である。

まず下側の不等式を示す。1 と e^t は正なので $1+e^t \geq 2\sqrt{e^t} = 2e^{t/2}$ である。両辺の対数をとると $\log(1+e^t) \geq \log 2 + \frac{t}{2}$ である。これは $\log 2 + \frac{x}{2} \log a \leq \log(1+a^x)$ を意味する。

次に上側を示す。 $F(t) = \log(1+e^t) - \log 2 - \frac{t}{2}$ とおく。すると $F(0) = 0$ であり、 $F'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{1}{2}$ なので $F'(0) = 0$ である。また $F''(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ である。ここで $(1+e^t)^2 - 4e^t = (e^t - 1)^2 \geq 0$ より $0 < F''(t) \leq \frac{1}{4}$ である。 $t \geq 0$ で、 $F'(0) = 0$ だから

$$F'(t) = \int_0^t F''(u) du \leq \int_0^t \frac{1}{4} du = \frac{t}{4}$$

である。さらに $F(0) = 0$ より

$$F(t) = \int_0^t F'(v) dv \leq \int_0^t \frac{v}{4} dv = \frac{t^2}{8}$$

である。したがって $\log(1+e^t) \leq \log 2 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8}$ である。 $t = x \log a$ を戻すと $\log(1+a^x) \leq \log 2 + \frac{x}{2} \log a + \frac{x^2}{8} (\log a)^2$ であり、求める不等式が示された。

(2) (1) で $a = 3, x = 1/n$ とする。すると

$$\log 2 + \frac{\log 3}{2n} \leq \log(1+3^{1/n}) \leq \log 2 + \frac{\log 3}{2n} + \frac{(\log 3)^2}{8n^2}$$

である。各辺から $\log 2$ を引くと

$$\frac{\log 3}{2n} \leq \log \left(\frac{1+3^{1/n}}{2} \right) \leq \frac{\log 3}{2n} + \frac{(\log 3)^2}{8n^2}$$

である。

ここで $\log a_n = n \log \left(\frac{1+3^{1/n}}{2} \right)$ だから、上の不等式に n をかけて

$$\frac{\log 3}{2} \leq \log a_n \leq \frac{\log 3}{2} + \frac{(\log 3)^2}{8n}$$

を得る。右端と左端は $n \rightarrow \infty$ でともに $\log 3/2$ に近づくので、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{\log 3}{2}$$

である。指数関数は連続なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{(\log 3)/2} = \sqrt{3}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

$t = x \log a$ とし、誤差関数 $F(t) = \log(1 + e^t) - \log 2 - t/2$ の一階導関数を直接評価する。補助関数で $0 \leq F'(t) \leq t/4$ を示して積分し、(2) は対数を取った数列をはさみうちする。

【解答】

(1)

$$t = x \log a \quad (t \geq 0)$$

とおき、

$$F(t) = \log(1 + e^t) - \log 2 - \frac{t}{2}$$

とする。すると

$$F'(t) = \frac{e^t - 1}{2(1 + e^t)} \geq 0$$

だから $F(t) \geq F(0) = 0$ であり、下側の不等式を得る。

上側の評価のため

$$K(t) = t(1 + e^t) - 2(e^t - 1)$$

とおく。

$$K'(t) = 1 + (t - 1)e^t, \quad K''(t) = te^t \geq 0.$$

$K'(0) = K(0) = 0$ なので $K'(t) \geq 0$ 、さらに $K(t) \geq 0$ である。これは

$$\frac{e^t - 1}{2(1 + e^t)} \leq \frac{t}{4}$$

を意味する。従って

$$0 \leq F(t) = \int_0^t F'(u) du \leq \int_0^t \frac{u}{4} du = \frac{t^2}{8}.$$

$t = x \log a$ を戻せば

$$\log 2 + \frac{x}{2} \log a \leq \log(1 + a^x) \leq \log 2 + \frac{x}{2} \log a + \frac{x^2}{8} (\log a)^2.$$

(2) (1) で $a = 3$, $x = 1/n$ とすると

$$\frac{\log 3}{2n} \leq \log \left(\frac{1 + 3^{1/n}}{2} \right) \leq \frac{\log 3}{2n} + \frac{(\log 3)^2}{8n^2}.$$

n 倍して

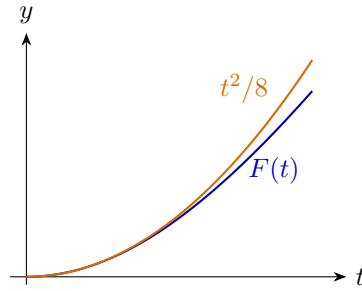
$$\frac{\log 3}{2} \leq \log a_n \leq \frac{\log 3}{2} + \frac{(\log 3)^2}{8n}.$$

はさみうちにより

$$\log a_n \rightarrow \frac{\log 3}{2},$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}.$$



【総評】 対数不等式を作って数列極限に使う問題で、想定時間は 22 分程度。下側は相加平均と相乗平均の形で即座に出るが、上側は $F''(t) \leq 1/4$ を示してから $F'(t)$ 、 $F(t)$ の順に積分評価する流れを丁寧に書く必要がある。(2) では $\log(1+3^{1/n})$ そのものではなく、 $\log((1+3^{1/n})/2)$ を扱うため、 $\log 2$ を引く操作を明示したい。近似名に頼らず、与えられた不等式で完全にはさみうちできる。

【第 4 問】

平面上において、7 点 A, P, Q, R, S, R', S' を右図のようにとる。ただし、

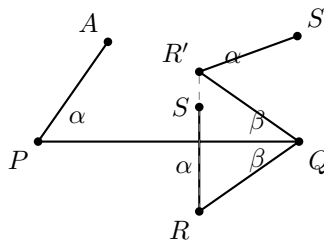
$$AP = a, \quad PQ = b, \quad QR = QR' = c, \quad RS = R'S' = d,$$

$$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\angle RQP = \angle PQR' = \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

である。このとき、 $AS^2 - AS'^2$ を $\sin \alpha$ 、 $\sin \beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。

参考図（原資料の「右図」を条件から再構成）



▶ 解法 1

【方針】

図の上下を決めて座標を置き、 $P = (0, 0)$ 、 $Q = (b, 0)$ とする。 A, R, R', S, S' の座標を、与えられた長ささと角 α, β から三角関数で表す。 $AS^2 - AS'^2$ は 2 つのベクトルの長さの 2 乗の差なので、展開後に対称な項が消えることを利用し、最後は加法定理で $\sin \alpha \sin \beta$ の形に整理する。

【解答】

図の配置に合わせて、 $P = (0, 0)$ 、 $Q = (b, 0)$ とおく。また A は PQ の上側にあるとして $A = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ とおく。

条件 $\angle RQP = \angle PQR' = \beta$ より、 R を下側、 R' を上側にとると $R = (b - c \cos \beta, -c \sin \beta)$ 、 $R' = (b - c \cos \beta, c \sin \beta)$ である。さらに $\angle SRQ = \alpha$ 、 $\angle S'R'Q = \alpha$ より $S = R + d(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ であり、 $S' = R' + d(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ である。

ここで $U = S - A$ 、 $U' = S' - A$ とおく。 $AS^2 - AS'^2 = |U|^2 - |U'|^2$ である。成分を書き出すと

$$U = (b - c \cos \beta + d \cos(\alpha + \beta) - a \cos \alpha, -c \sin \beta + d \sin(\alpha + \beta) - a \sin \alpha)$$

であり、

$$U' = (b - c \cos \beta + d \cos(\alpha - \beta) - a \cos \alpha, c \sin \beta + d \sin(\alpha - \beta) - a \sin \alpha)$$

である。

このまま展開してもよいが、差だけを取るため、共通部分をまとめる。 $W = (b - c \cos \beta - a \cos \alpha, -a \sin \alpha)$ とおくと $U = W + (d \cos(\alpha + \beta), -c \sin \beta + d \sin(\alpha + \beta))$ となる。対応する U' との差を展開すると、 b, c, d の 2 乗項や余弦だけの項は打

ち消し合い、残る項は $AS^2 - AS'^2 = 4ac \sin \alpha \sin \beta - 4bd \sin \alpha \sin \beta$ である。したがって $AS^2 - AS'^2 = 4(ac - bd) \sin \alpha \sin \beta$ である。

展開の要所を確認しておく。加法定理より $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$ であり、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ である。これらを使うと、 A と R, R' の上下差から $4ac \sin \alpha \sin \beta$ 、 Q から S, S' へ向かう部分から $-4bd \sin \alpha \sin \beta$ が現れ、上の式にまとまる。

▶ 解法 2

【方針】

P, Q を水平に置き、条件どおりの方向ベクトルで A, R, R', S, S' を表す。長さの二乗差を $(S - S') \cdot (S + S' - 2A)$ と因数分解し、対称成分を展開せずに消去する。

【解答】

$P = (0, 0)$ 、 $Q = (b, 0)$ とし、 A を PQ の上側に置く。条件に従って

$$A = (a \cos \alpha, a \sin \alpha),$$

$$R = (b - c \cos \beta, -c \sin \beta), \quad R' = (b - c \cos \beta, c \sin \beta)$$

と書ける。また

$$S = R + d(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)),$$

$$S' = R' + d(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)).$$

長さの二乗差を内積で因数分解すると

$$AS^2 - AS'^2 = (S - S') \cdot (S + S' - 2A).$$

加法定理から

$$S - S' = 2 \sin \beta (-d \sin \alpha, -c + d \cos \alpha)$$

であり、

$$S + S' - 2A = 2(b - c \cos \beta + d \cos \alpha \cos \beta - a \cos \alpha, d \sin \alpha \cos \beta - a \sin \alpha).$$

従って

$$AS^2 - AS'^2 = 4 \sin \alpha \sin \beta [-d\{b - c \cos \beta + d \cos \alpha \cos \beta - a \cos \alpha\} + (-c + d \cos \alpha)(d \cos \beta - a)].$$

角括弧内では $cd \cos \beta$ 、 $d^2 \cos \alpha \cos \beta$ 、 $ad \cos \alpha$ の項がそれぞれ消え、

$$ac - bd$$

だけが残る。従って

$$AS^2 - AS'^2 = 4(ac - bd) \sin \alpha \sin \beta.$$

【総評】 図形の情報を座標化して、長さの 2 乗の差を整理する問題で、想定時間は 20 分程度。最初に R を下側、 R' を上側と決めて符号を固定することが重要である。途中計算は長く見えるが、求めるのが差なので対称な 2 乗項は消え、 $\sin \alpha \sin \beta$ を含む項だけが残る。加法定理の符号、特に $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ の符号を誤ると最終式の $ac - bd$ が逆になるため注意したい。

【第 5 問】

座標空間において、

平面 $z = \sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$ 、中心 $(0, 0, \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z = -\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$ 、中心 $(0, 0, -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする。また、空間内の点 $P(x, y, z)$ に対し、円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m 、円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくとき、 m と M を r および z で表せ。

(2) $|M - 2\sqrt{6}| \geq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 P の水平距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と高さ z だけで、円までの最短・最長距離が決まる。 C_1 への最短は水平距離 $|r - \sqrt{2}|$ 、 C_2 への最長は水平距離 $r + \sqrt{2}$ を使う。(2) では rz 平面で焦点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 、 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ をもつ楕円条件に変換し、 $r \geq 0$ の半楕円を z 軸まわりに回転する体積として

$$2\pi \iint r \, dr \, dz$$

を計算する。

【解答】

(1) 点 $P(x, y, z)$ の xy 平面への射影と原点との距離を $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする。円 C_1 は高さ $z = \sqrt{2}$ の平面上で、中心の水平位置は原点、半径は $\sqrt{2}$ である。したがって、水平面内で P の射影から C_1 までの最短距離は $|r - \sqrt{2}|$ である。高さの差は $z - \sqrt{2}$ なので $m = \sqrt{(r - \sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{2})^2}$ である。

同様に、円 C_2 は高さ $z = -\sqrt{2}$ にある。 C_2 上の点と P の距離を最大にするには、水平面内で P の射影と反対側の円周上の点を取ればよいので、水平距離は $r + \sqrt{2}$ である。高さの差は $z + \sqrt{2}$ だから $M = \sqrt{(r + \sqrt{2})^2 + (z + \sqrt{2})^2}$ である。

(2) rz 平面で点 P を (r, z) と見る。ただし $r \geq 0$ である。(1) より $m = PB$, $M = PA$ と書ける。ただし $A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。この 2 点間の距離は $AB = 4$ である。

条件は $|M - 2\sqrt{6}| \geq m$ である。もし $M \geq 2\sqrt{6}$ なら、条件は $M - 2\sqrt{6} \geq m$ 、すなわち $M - m \geq 2\sqrt{6}$ を意味する。しかし三角形の辺の関係より $M - m \leq AB = 4$ であり、 $2\sqrt{6} > 4$ なので不可能である。

したがって必ず $M < 2\sqrt{6}$ であり、このとき条件は $2\sqrt{6} - M \geq m$ すなわち $M + m \leq 2\sqrt{6}$ である。これは、焦点 A, B 、長半径 $\sqrt{6}$ の楕円の内部および周上を表す。焦点間距離の半分は 2 なので、短半径は $\sqrt{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \sqrt{2}$ である。

座標を $u = \frac{r+z}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{r-z}{\sqrt{2}}$ とおくと、焦点は $(u, v) = (-2, 0), (2, 0)$ となる。したがって楕円は $\frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{2} \leq 1$ で表される。また $r = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ であるから、実際に回転させる断面はこの楕円のうち $u+v \geq 0$ の部分である。

体積は、 rz 平面の断面を z 軸のまわりに回転して

$$V = 2\pi \iint_D r \, dr \, dz$$

で求められる。ここで D は上の半楕円領域である。変換 $(u, v) \mapsto (r, z)$ の面積倍率は 1 である。さらに $u = \sqrt{6}X$, $v = \sqrt{2}Y$ とおくと、 $X^2 + Y^2 \leq 1$ であり、面積倍率は $2\sqrt{3}$ である。また $r = \sqrt{3}X + Y$ で、条件は $\sqrt{3}X + Y \geq 0$ となる。

単位円を、直線 $\sqrt{3}X + Y = 0$ に垂直な軸で見る。 $W = (\sqrt{3}X + Y)/2$ とおけば、半円は $W \geq 0$ であり、 $r = 2W$ である。単位半円において

$$\iint_{W \geq 0} W \, dX \, dY = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \rho \cos \phi \cdot \rho \, d\rho \, d\phi = \frac{2}{3}$$

である。したがって

$$\iint_D r \, dr \, dz = 2\sqrt{3} \iint_{W \geq 0} 2W \, dX \, dY = 2\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

である。ゆえに体積は $V = 2\pi \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

距離条件を焦点距離の和が一定以下となる楕円へ直す。楕円を単位円へ変換した後、 $r \geq 0$ の半円を回転軸に垂直な座標 W で縦に切り、円筒殻の積分を 1 変数積分として計算する。

【解答】

(1) P の xy 平面への射影と原点との距離を r とする。 C_1 までの水平最短距離は $|r - \sqrt{2}|$ 、高さの差は $z - \sqrt{2}$ だから

$$m = \sqrt{(r - \sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{2})^2}.$$

C_2 までの水平最大距離は $r + \sqrt{2}$ 、高さの差は $z + \sqrt{2}$ だから

$$M = \sqrt{(r + \sqrt{2})^2 + (z + \sqrt{2})^2}.$$

(2) rz 平面で

$$A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad B = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

とすれば $M = PA$, $m = PB$, $AB = 4$ である。

$M \geq 2\sqrt{6}$ なら条件から $M - m \geq 2\sqrt{6}$ となるが、

$$M - m \leq AB = 4 < 2\sqrt{6}$$

に反する。従って条件は

$$M + m \leq 2\sqrt{6}$$

と同値である。これは焦点 A, B 、長半径 $\sqrt{6}$ 、短半径 $\sqrt{2}$ の楕円内部である。

$$u = \frac{r+z}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{r-z}{\sqrt{2}}$$

とすると

$$\frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{2} \leq 1.$$

さらに $u = \sqrt{6}X$, $v = \sqrt{2}Y$ と置けば単位円になり、面積倍率は $2\sqrt{3}$ 、かつ

$$r = \sqrt{3}X + Y.$$

単位円内で

$$W = \frac{\sqrt{3}X + Y}{2}$$

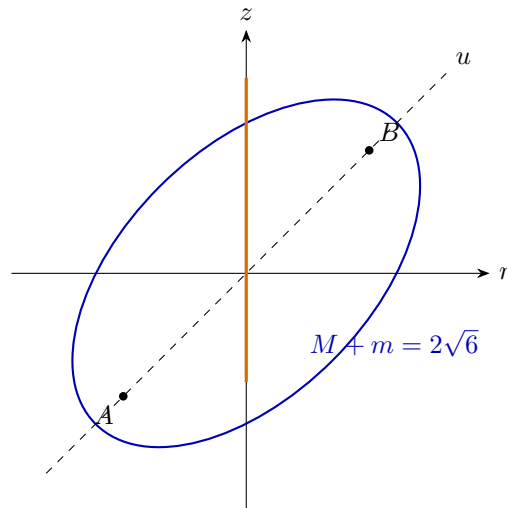
を一方の直交座標とすれば $r = 2W$ 、条件 $r \geq 0$ は $W \geq 0$ である。もう一方の座標を T とする。

従って

$$\begin{aligned} \iint_D r \, dr \, dz &= 2\sqrt{3} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-W^2}}^{\sqrt{1-W^2}} 2W \, dT \, dW \\ &= 8\sqrt{3} \int_0^1 W \sqrt{1-W^2} \, dW \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

この断面を z 軸の周りに回すから

$$V = 2\pi \iint_D r \, dr \, dz = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}.$$



【総評】 距離条件を楕円に読み替え、その半楕円を回転する空間図形問題で、想定時間は35分程度。(1)では水平距離と高さの差に分けると、最短距離 m と最長距離 M が自然に出る。(2)の核心は、 $|M - 2\sqrt{6}| \geq m$ の絶対値を外すとき、 $M \geq 2\sqrt{6}$ の場合が三角形の不等式で不可能になることを示す点である。楕円化した後は $r \geq 0$ の半分だけを回転するので、断面全体を回してしまわないよう注意したい。