

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 1999 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

実数 x に対して、 x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す． $a_m = [\sqrt{m}]$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) に対して、数列 $b_1, b_2, b_3, \dots$ を $b_1 = 0$, $k \geq 2$ のとき $a_m < k \leq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k = m$ と定める．

次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$$

が成り立つことを示せ．

(3)

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}]$$

を求めよ．

第 2 問

n は 2 以上の自然数, c および q は正の実数とする. xy 平面上に, 原点 O , 点 $P(1, 0)$, および点 $Q(0, q)$ を頂点にもつ三角形をとる. この三角形は, 曲線 $y = cx^n$ により 2 つの領域に分割されるが, これらのうち, 点 P を含む領域を A , 点 Q を含む領域を B とする. 係数 c は A の面積と B の面積が等しくなるように定められているとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 領域 A を x 軸のまわりに 1 回転してえられる回転体の体積を $V(A)$ とし, 領域 B を y 軸のまわりに 1 回転してえられる回転体の体積を $V(B)$ とする. このとき, 各 n に対して $V(A) = V(B)$ が成り立つように q をただ 1 通りに定めることができることを示せ.
- (2) 各 n に対して (1) で定まる q の値を q_n で表すとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

を求めよ.

第 3 問

次の問いに答えよ.

- (1) p, q, a, b は定数で $p > 0, q > 0$ とする. x と y が $x \geq y$ を満たしながら動くとき,

$$-px^2 - qy^2 + ax + by$$

の最大値, およびそのときの x, y を求めよ.

- (2) a, b, c を定数とする. x, y および z が $x \geq y \geq z$ を満たしながら動くとき,

$$-x^2 - y^2 - z^2 + ax + by + cz$$

の最大値を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)