

大阪大学 1999 年度 理系 (後期)

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 x に対して, x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す. $a_m = [\sqrt{m}]$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) に対して, 数列 $b_1, b_2, b_3, \dots$ を $b_1 = 0$, $k \geq 2$ のとき $a_m < k \leq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k = m$ と定める.

次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ.
 (2) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$$

が成り立つことを示せ.

- (3)

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}]$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

定義の不等式を平方して b_k を決める。(2) は $[\sqrt{m}]$ を格子点の個数と見て二重計数し、(3) は得られた恒等式と平方和を用いる。

【解答】

- (1) $k \geq 2$ に対し

$$a_m < k \leq a_{m+1}$$

は

$$[\sqrt{m}] < k \leq [\sqrt{m+1}]$$

である。これは

$$m < k^2 \leq m+1$$

と同値だから

$$m = k^2 - 1.$$

$b_1 = 0 = 1^2 - 1$ も含めて

$$b_k = k^2 - 1$$

である。

- (2) $[\sqrt{m}]$ は

$$1 \leq k, \quad k^2 \leq m$$

を満たす整数 k の個数である。従って

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m$$

は整数対 (k, m) で

$$1 \leq k \leq n, \quad k^2 \leq m \leq n^2$$

を満たすものの個数である。 k を固定するとその個数は

$$n^2 - k^2 + 1.$$

一方 $b_k = k^2 - 1$ だから

$$(n^2 - k^2 + 1) + b_k = n^2.$$

これを $k = 1, \dots, n$ で足すと

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3.$$

(3) (2) と (1) より

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}] &= n^3 - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= n^3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \\ &= \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

$[\sqrt{m}]$ が一定になる区間

$$j^2 \leq m \leq (j+1)^2 - 1$$

ごとに和をまとめる。(3) を直接計算した後、(1) で求めた b_k の和を加えて (2) の恒等式を別方向から確認する。

【解答】

(1) $a_m = [\sqrt{m}]$ が $k-1$ から k へ初めて増えるのは

$$m+1 = k^2$$

のときである。従って

$$b_k = k^2 - 1 \quad (k \geq 1)$$

である。

(3) $1 \leq j \leq n-1$ に対し

$$[\sqrt{m}] = j$$

となるのは

$$j^2 \leq m \leq (j+1)^2 - 1$$

の $2j+1$ 個である。最後の $m = n^2$ では値が n なので

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}] &= \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) + n \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j + n \\ &= \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}. \end{aligned}$$

(2) (1) から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n. \end{aligned}$$

これと (3) の式を加えると

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$$

となり、すべての自然数 n について示された。

【総評】 難度 6、計算量 5。逆向きに定義された (b_k) は (a_m) の段差位置を表す。二重計数により (2) を (3) の公式に依らず証明できる。答案では小問ラベル、場合分け、等号または唯一性の根拠を明示した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 2 問】

n は 2 以上の自然数, c および q は正の実数とする. xy 平面上に, 原点 O , 点 $P(1, 0)$, および点 $Q(0, q)$ を頂点にもつ三角形をとる. この三角形は, 曲線 $y = cx^n$ により 2 つの領域に分割されるが, これらのうち, 点 P を含む領域を A , 点 Q を含む領域を B とする. 係数 c は A の面積と B の面積が等しくなるように定められているとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 領域 A を x 軸のまわりに 1 回転してえられる回転体の体積を $V(A)$ とし, 領域 B を y 軸のまわりに 1 回転してえられる回転体の体積を $V(B)$ とする. このとき, 各 n に対して $V(A) = V(B)$ が成り立つように q をただ 1 通りに定めることができることを示せ.
- (2) 各 n に対して (1) で定まる q の値を q_n で表すとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

曲線と斜辺の交点の x 座標を r とする. 面積二等分条件から r を n だけで決め, 二つの回転体の体積を q の二次式と一次式として表す.

【解答】

曲線 $y = cx^n$ と斜辺 $y = q(1 - x)$ の交点の x 座標を r とする. すると

$$0 < r < 1, \quad cr^n = q(1 - r).$$

点 Q を含む領域 B の面積は

$$\begin{aligned} |B| &= \int_0^r \{q(1 - x) - cx^n\} dx \\ &= q \left\{ r - \frac{r^2}{2} - \frac{r(1 - r)}{n + 1} \right\}. \end{aligned}$$

三角形全体の面積は $q/2$ なので, 二等分条件は

$$r - \frac{r^2}{2} - \frac{r(1 - r)}{n + 1} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

左辺は $0 \leq r \leq 1$ で狭義増加し, 端点値は 0 と $1/2$ だから, (1) を満たす $r = r_n$ はただ一つ存在する.

(1) A を x 軸のまわりに回転すると

$$\begin{aligned} V(A) &= \pi \int_0^r c^2 x^{2n} dx + \pi \int_r^1 q^2 (1 - x)^2 dx \\ &= \pi q^2 (1 - r)^2 \left\{ \frac{r}{2n + 1} + \frac{1 - r}{3} \right\}. \end{aligned}$$

また円筒殻法により

$$\begin{aligned} V(B) &= 2\pi \int_0^r x \{q(1 - x) - cx^n\} dx \\ &= 2\pi q \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{(1 - r)r^2}{n + 2} \right\}. \end{aligned}$$

括弧内はいずれも正である. 従って $V(A) = V(B)$ を満たす正数 q は

$$q = \frac{2 \{r^2/2 - r^3/3 - (1 - r)r^2/(n + 2)\}}{(1 - r)^2 \{r/(2n + 1) + (1 - r)/3\}}$$

のただ一つである.

(2) (1) で定まる r_n は、(1) と単調性から

$$r_n \longrightarrow r$$

となり、極限 r は

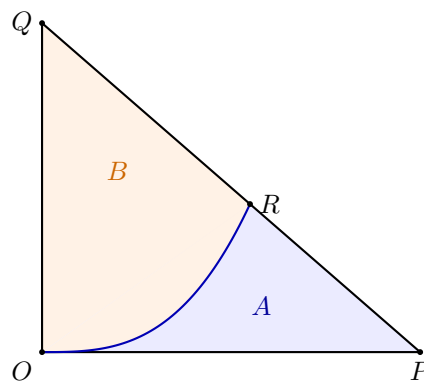
$$r - \frac{r^2}{2} = \frac{1}{4}$$

を満たす。 $0 < r < 1$ より

$$r = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

上の q の式で極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \frac{2(r^2/2 - r^3/3)}{(1-r)^3/3} \\ &= \frac{r^2(3-2r)}{(1-r)^3} \\ &= 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2

【方針】

曲線と斜辺の交点の x 座標を r_n とする。面積二等分条件は r_n の二次方程式になり、小さい方の解を明示できる。回転体の体積は平面領域の一次モーメントとして計算し、 $V(A)$ は q^2 、 $V(B)$ は q に比例することから唯一性を示す。

【解答】

曲線と斜辺の交点を

$$R(r, cr^n)$$

とする。このとき

$$cr^n = q(1-r).$$

領域 B の面積が三角形全体の半分 $q/4$ であることから

$$q \left(r - \frac{r^2}{2} \right) - \frac{cr^{n+1}}{n+1} = \frac{q}{4}.$$

交点条件を代入すると

$$r - \frac{r^2}{2} - \frac{r(1-r)}{n+1} = \frac{1}{4}.$$

整理して

$$(n-1)r^2 - 2nr + \frac{n+1}{2} = 0.$$

$0 < r < 1$ にある解は

$$r = r_n = \frac{n - \sqrt{(n^2+1)/2}}{n-1}$$

である。

(1) A には円板法、 B には円筒殻法を用いる。交点条件

$$c = \frac{q(1-r)}{r^n}$$

を代入してそれぞれ 1 変数で積分すると

$$V(A) = \pi q^2 (1-r)^2 \left\{ \frac{r}{2n+1} + \frac{1-r}{3} \right\},$$

$$V(B) = 2\pi q \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{(1-r)r^2}{n+2} \right\}.$$

2 つの波括弧内は正である。従って $V(A) = V(B)$ を満たす正数 q は

$$q = \frac{2 \{ r^2/2 - r^3/3 - (1-r)r^2/(n+2) \}}{(1-r)^2 \{ r/(2n+1) + (1-r)/3 \}}$$

の 1 つだけである。

(2) 明示式から

$$r_n \longrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} =: r.$$

従って上の q の式で極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \frac{2(r^2/2 - r^3/3)}{(1-r)^3/3} \\ &= \frac{r^2(3-2r)}{(1-r)^3} \\ &= 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 9、計算量 9。面積条件が交点位置 (r_n) を q から切り離すことが核心である。体積等式は正の q に関する一次方程式となり唯一性が出る。答案では小問ラベル、場合分け、等号または唯一性の根拠を明示した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 3 問】

次の問いに答えよ。

(1) p, q, a, b は定数で $p > 0, q > 0$ とする。 x と y が $x \geq y$ を満たしながら動くとき、

$$-px^2 - qy^2 + ax + by$$

の最大値、およびそのときの x, y を求めよ。

(2) a, b, c を定数とする。 x, y および z が $x \geq y \geq z$ を満たしながら動くとき、

$$-x^2 - y^2 - z^2 + ax + by + cz$$

の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 制約なしの頂点が $x \geq y$ に入るかを判定し、入らなければ境界 $x = y$ で最大化する。(2) 同じ操作を 3 変数の順序制約に対して隣接する違反区間をまとめる形で行う。

【解答】

(1) 制約がなければ

$$x = \frac{a}{2p}, \quad y = \frac{b}{2q}$$

で最大となる。これが $x \geq y$ を満たす条件は

$$aq \geq bp.$$

このとき最大値と最大点は

$$\frac{a^2}{4p} + \frac{b^2}{4q}, \quad (x, y) = \left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2q} \right).$$

一方 $aq < bp$ のとき、最大点は境界 $x = y = t$ 上にある。そこで

$$-(p+q)t^2 + (a+b)t$$

を最大化すると

$$t = \frac{a+b}{2(p+q)}$$

であり、最大値は

$$\frac{(a+b)^2}{4(p+q)}.$$

従ってこの場合の最大点は

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2(p+q)}, \frac{a+b}{2(p+q)} \right).$$

(2) 平方完成すると

$$\begin{aligned} & -x^2 - y^2 - z^2 + ax + by + cz \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{c}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

従って $(a/2, b/2, c/2)$ に最も近い $x \geq y \geq z$ の点を求めればよい。結果は次の 4 場合である。

条件	最大値
$a \geq b \geq c$	$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$
$a < b, a + b \geq 2c$	$\frac{(a+b)^2}{8} + \frac{c^2}{4}$
$b < c, 2a \geq b + c$	$\frac{a^2}{4} + \frac{(b+c)^2}{8}$
上記以外	$\frac{(a+b+c)^2}{12}$

実際、第 2 の場合は $x = y = (a+b)/4$, $z = c/2$ 、第 3 の場合は $x = a/2$, $y = z = (b+c)/4$ 、最後の場合は

$$x = y = z = \frac{a+b+c}{6}$$

で最大となる。各条件は、このように平均してまとめた値が隣の値との順序を保つ条件に一致する。境界では隣接する二つの式は同じ値を与える。

▶ 解法 2

【方針】

平方完成した二次式の最大点は、制約領域 $x \geq y \geq z$ の内部、2 つの境界面 $x = y, y = z$ 、または境界直線 $x = y = z$ のいずれかにある。それぞれで平方完成し、得られた最大点とその面にとどまる条件を調べて 4 場合を得る。

【解答】

(1) 平方完成すると

$$\begin{aligned} -px^2 - qy^2 + ax + by &= \frac{a^2}{4p} + \frac{b^2}{4q} \\ &\quad - p \left(x - \frac{a}{2p} \right)^2 - q \left(y - \frac{b}{2q} \right)^2. \end{aligned}$$

頂点が $x \geq y$ を満たす条件は $aq \geq bp$ である。このとき最大値は

$$\frac{a^2}{4p} + \frac{b^2}{4q}, \quad (x, y) = \left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2q} \right).$$

$aq < bp$ のときは境界 $x = y = t$ 上で最大となり、

$$-(p+q)t^2 + (a+b)t$$

を平方完成して

$$\text{最大値} = \frac{(a+b)^2}{4(p+q)}, \quad x = y = \frac{a+b}{2(p+q)}$$

を得る。

(2) 制約領域の内部では

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

が候補で、条件は $a \geq b \geq c$ 、最大値は

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

である。

境界面 $x = y = t$ では

$$-2t^2 + (a+b)t - z^2 + cz$$

を最大化するので

$$t = \frac{a+b}{4}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

これは $t \geq z$ すなわち $a+b \geq 2c$ のとき面上にあり、内部の順序違反が $a < b$ の場合に採用される。最大値は

$$\frac{(a+b)^2}{8} + \frac{c^2}{4}.$$

同様に境界面 $y = z = t$ から

$$x = \frac{a}{2}, \quad t = \frac{b+c}{4}$$

を得る。条件は $b < c$, $2a \geq b+c$ で、最大値は

$$\frac{a^2}{4} + \frac{(b+c)^2}{8}.$$

以上のいずれの点も順序条件を満たさない場合、最大点は $x = y = z = t$ 上にある。

$$-3t^2 + (a+b+c)t$$

を最大化して

$$t = \frac{a+b+c}{6}, \quad \text{最大値} = \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

従って求める最大値は

$$\begin{cases} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} & (a \geq b \geq c), \\ \frac{(a+b)^2}{8} + \frac{c^2}{4} & (a < b, a+b \geq 2c), \\ \frac{a^2}{4} + \frac{(b+c)^2}{8} & (b < c, 2a \geq b+c), \\ \frac{(a+b+c)^2}{12} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

である。境界条件が等号のとき、隣り合う式は同じ値を与える。

【総評】 難度 8、計算量 7。第 (2) 問は順序に反する隣接成分を平均して一つのブロックにまとめる。4 場合が全領域を重複なく覆うことを条件から確認できる。答案では小問ラベル、場合分け、等号または唯一性の根拠を明示した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。