

大阪大学 2000 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$a > b > 0$ とする. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$ における接線と x 軸との交点を P とする. また, 円の外部の点 (b, c) からこの円に 2 本の接線を引き, 接点を Q, R とする. このとき, 2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

円 $x^2 + y^2 = a^2$ の接点 (u, v) における接線は, 半径ベクトル (u, v) と接線方向が垂直であることから $ux + vy = a^2$ と表せる. まず与えられた接点での接線と x 軸の交点 P を求める. 次に, 外部点 (b, c) からの任意の接点 (u, v) は, その接線が (b, c) を通るため $bu + cv = a^2$ を満たす. したがって 2 接点 Q, R は同じ直線 $bx + cy = a^2$ 上にあり, その直線に P が乗ることを確認する.

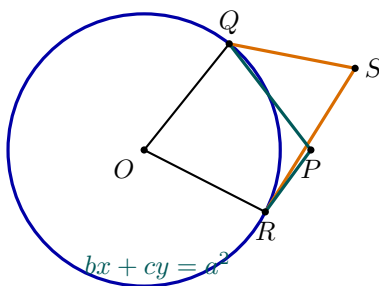
【解答】

円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 (u, v) を考える. 接線上の点を (x, y) とすると, 接線方向のベクトルは $(x - u, y - v)$ であり, 半径ベクトル (u, v) と垂直である. したがって $u(x - u) + v(y - v) = 0$ である. (u, v) は円上の点なので $u^2 + v^2 = a^2$ であり, 接線の方程式は $ux + vy = a^2$ となる.

いま $A_0 = (b, \sqrt{a^2 - b^2})$ とおく. この点における接線は $bx + \sqrt{a^2 - b^2}y = a^2$ である. x 軸との交点では $y = 0$ だから $bx = a^2$ より $P = \left(\frac{a^2}{b}, 0\right)$ である. ここで $b > 0$ なので, この値は定まる.

次に, 外部の点 (b, c) から円へ引いた接線の接点を (u, v) とする. その接線の式は, 上で求めた通り $ux + vy = a^2$ である. この接線は点 (b, c) を通るので $ub + vc = a^2$ が成り立つ. すなわち接点 (u, v) は直線 $bx + cy = a^2$ 上にある.

したがって, 2 つの接点 Q, R はともに $bx + cy = a^2$ 上にある. 点 $P = (a^2/b, 0)$ をこの直線に代入すると $b \cdot \frac{a^2}{b} + c \cdot 0 = a^2$ であるから, P も同じ直線上にある. よって, 2 点 Q, R を通る直線は P を通る.



▶ 解法 2 (接点条件のベクトル表示)

【方針】

中心を原点とするベクトルで接点条件を書く。外部点から接点へ向かう接線と半径の直交条件だけで、2 接点が満たす一次方程式が同時に得られる。

【解答】

外部点 $S = (b, c)$ の位置ベクトルを $\vec{s}$ 、円上の接点 T の位置ベクトルを $\vec{t}$ とする。半径 OT と接線 ST は垂直だから

$$\vec{t} \cdot (\vec{s} - \vec{t}) = 0.$$

$|\vec{t}| = a$ より

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = a^2.$$

従って、外部点 S から引いたどちらの接線についても、接点の座標 (x, y) は

$$bx + cy = a^2$$

を満たす。ゆえに 2 接点 Q, R を通る直線はこの直線である。

一方、指定された円周上の点

$$\left(b, \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

における接線は

$$bx + \sqrt{a^2 - b^2}y = a^2.$$

x 軸との交点は

$$P = \left(\frac{a^2}{b}, 0\right).$$

この点を $bx + cy = a^2$ へ代入すると等式が成り立つ。従って

$$P, Q, R$$

は一直線上にある。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安は 12 分から 15 分。円の接線 $ux + vy = a^2$ を公式として使うだけでなく、半径と接線の垂直から一度導いておくと答案が安定する。外部点からの 2 接点が満たす直線 $bx + cy = a^2$ は、いわゆる接点を結ぶ直線だが、名前を使わなくても代入だけで導ける。最後に $P = (a^2/b, 0)$ を代入して同一直線上にあることを示せばよい。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x, y) | x = 0, 1, 2, 3, y = 0, 1, 2, 3\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において、次の事象の起こる確率を求めよ。

「選んだ 3 点が三角形の頂点となり、その三角形の面積は $\frac{9}{2}$ である」

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

全事象は 16 個の格子点から 3 点を選ぶ数である。三角形の面積 $9/2$ は、 $[0, 3] \times [0, 3]$ の正方形内にできる三角形の最大面積である。最大面積になるには、正方形の一辺全体を底辺にし、残りの点はその反対側の辺上にある必要がある。この条件で、4 つの辺それぞれを底辺にした場合を数え、3 つの隅を選ぶ三角形が二重に数えられる分を除く。

【解答】

16 個の点は正方形 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$ の格子点である。異なる 3 点の選び方は ${}_{16}C_3 = 560$ 通りである。

次に、面積が $9/2$ となる三角形を数える。3 頂点を (x_i, y_i) とし、添字を付け替えて

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3$$

とする。また

$$u = y_2 - y_1, \quad v = y_3 - y_2$$

とおくと、 $u, v \geq 0, u + v = y_3 - y_1 \leq 3$ である。三角形の符号付き面積の 2 倍は

$$D = -vx_1 + (u + v)x_2 - ux_3$$

である。 $0 \leq x_i \leq 3$ だから、正の係数の和と負の係数の絶対値の和はいずれも $u + v$ であり、

$$|D| \leq 3(u + v) \leq 9.$$

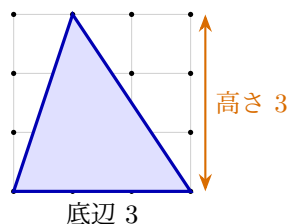
従って三角形の面積は $9/2$ 以下である。

等号 $|D| = 9$ が成り立つには、まず $u + v = 3$ 、すなわち $y_1 = 0, y_3 = 3$ が必要である。 $u, v > 0$ なら、 $D = 9$ のとき $x_2 = 3, x_1 = x_3 = 0$ 、 $D = -9$ のときは左右が逆となる。 $u = 0$ なら $y_1 = y_2 = 0$ で、 $|D| = 3|x_2 - x_1| = 9$ より下辺の両端を取る。 $v = 0$ なら同様に上辺の両端を取る。従って等号の場合はちょうど「正方形の一辺の両端を取り、第 3 点を反対側の辺上にする」形である。

例えば左辺 $x = 0$ の両端を底辺にとると、第 3 点は右辺 $x = 3$ 上の 4 点のいずれかである。

同じことが正方形の 4 つの辺について成り立つ。よって一見 $4 \cdot 4 = 16$ 通りである。ただし、正方形の 4 つの頂点のうち 3 つを選ぶ三角形は、隣り合う 2 辺のどちらを底辺と見るかで 2 回数えられている。このような三角形は ${}_4C_3 = 4$ 通りある。したがって、面積 $9/2$ の三角形の個数は $16 - 4 = 12$ である。

よって求める確率は $\frac{12}{560} = \frac{3}{140}$ である。



▶ 解法 2 (最小外接長方形の等号条件)

【方針】

三角形を含む最小の軸平行長方形を考える。面積が外側の 3×3 正方形の半分に達するための等号条件から、1 辺の両端と反対辺上の 1 点という形を確定し、重複を除いて数える。

【解答】

全事象は

$${}_{16}C_3 = 560$$

通りである。

選んだ三角形を含む最小の軸平行長方形の横幅を w 、縦幅を h とする。三角形の面積はその長方形の面積の半分以下だから

$$[\triangle] \leq \frac{wh}{2} \leq \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

面積が $9/2$ になるには $w = h = 3$ で、さらに三角形が長方形の面積のちょうど半分を占めなければならない。この等号条件は、正方形の 1 辺の両端を取り、第 3 点を反対側の辺上を取る場合に限る。

底辺となる正方形の辺は 4 通り、反対側の辺上の格子点は 4 通りなので

$$4 \cdot 4 = 16$$

と数えられる。ただし正方形の 3 頂点からなる三角形 4 個は、隣り合う 2 辺のどちらを底辺とするかで 2 回ずつ数えている。従って該当する三角形は

$$16 - 4 = 12$$

個である。求める確率は

$$\frac{12}{560} = \frac{3}{140}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安は 15 分から 18 分。面積 $9/2$ は 3×3 の正方形内で作れる最大三角形面積である、という観察が速い。最大面積になる配置を「正方形の一辺全体を底辺、反対側の辺上に第 3 点」と特徴づけると、数え上げは $4 \cdot 4 - 4$ で終わる。注意点は、3 つの隅を選ぶ三角形が二重に数えられることと、全事象が順序なしの ${}_{16}C_3$ 通りであること。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

どのような負でない 2 つの整数 m と n をもちいても $x = 5m + 3n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

まず小さい正の整数を直接調べ、表せない候補を拾う。その後は、3 で割った余りごとに 0、2、1 の 3 場合へ分ける。 $x \geq 8$ なら、余り 0 は $3n$ 、余り 2 は $5 + 3n$ 、余り 1 は $10 + 3n$ と表せる。これにより、調べるべき小さい数だけが残る。

【解答】

まず小さい正の整数を調べる。 m, n は負でない整数なので、表せる数は $5m + 3n$ である。1, 2 は明らかに表せない。 $3 = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1$ は表せる。4 は、 $5m$ を使うと大きすぎ、 $3n$ だけでは $0, 3, 6, \dots$ なので表せない。 $5 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ 、 $6 = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2$ は表せる。7 は $m = 0$ なら 3 の倍数でなく、 $m = 1$ なら残りが 2 で 3 の倍数でなく、 $m \geq 2$ なら $5m \geq 10$ となるので表せない。

したがって、ここまでで表せない候補は 1, 2, 4, 7 である。

次に $x \geq 8$ の正の整数はすべて表せることを示す。 x を 3 で割った余りで分ける。 $x \equiv 0 \pmod{3}$ のときは $x = 3n$ と書けるので、 $m = 0$ とすればよい。 $x \equiv 2 \pmod{3}$ のとき、 $x \geq 8$ だから $x - 5 \geq 3$ であり、しかも $x - 5$ は 3 で割り切れる。したがって $x = 5 + 3n$ と書ける。 $x \equiv 1 \pmod{3}$ のとき、 $x \geq 8$ かつ余り 1 である最小の数は 10 なので、実際には $x \geq 10$ である。このとき $x - 10 \geq 0$ で、 $x - 10$ は 3 で割り切れる。したがって $x = 10 + 3n = 5 \cdot 2 + 3n$ と書ける。

以上より、8 以上の正の整数はすべて $5m + 3n$ の形に表せる。したがって、求める正の整数は 1, 2, 4, 7 である。

▶ 解法 2 (3 つの連続整数からの帰納)

【方針】

8, 9, 10 が表せることを基点にする。表せる数に 3 を加えても表せるため、3 つの連続整数から 8 以上をすべて覆える。残りの小さい整数だけを直接調べる。

【解答】

$$8 = 5 + 3, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 10 = 5 \cdot 2$$

はいずれも $5m + 3n$ の形に表せる。ある整数 $N = 5m + 3n$ が表せるなら

$$N + 3 = 5m + 3(n + 1)$$

も表せる。従って

$$8, 11, 14, \dots; \quad 9, 12, 15, \dots; \quad 10, 13, 16, \dots$$

はすべて表せる。これは 8 以上の全整数を覆う。

そこで 1 から 7 までは直接調べる。

$$3 = 3, \quad 5 = 5, \quad 6 = 3 + 3$$

は表せる。一方 1, 2, 4, 7 は、5 を 0 回または 1 回使った残りが 3 の非負整数倍にならず、2 回以上使えば大きすぎるため表せない。従って答えは

$$1, 2, 4, 7$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 3、計算量は 10 段階中 2。目安は 8 分。3 と 5 の組合せで表せる数を、3 で割った余りで見るのが最も簡潔である。小さい数の確認では、7 が表せないことを $m = 0, 1, 2$ 以上の場合に分けて明示すると漏れがない。8, 9, 10 が表せ、以後は 3 を足せるという帰納的な見方も有効で、答案ではどちらか一方を明確に書けば十分である。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

実数 x に対して、 x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す。 n を正の整数とし $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2}$ とおく。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

床関数は $y - 1 < [y] \leq y$ で挟める。ここで $y = \sqrt{2n^2 - k^2} = n\sqrt{2 - (k/n)^2}$ とおくと、 a_n は $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - (k/n)^2}$ と誤差高々 $1/n$ の範囲に入る。したがって極限はリーマン和

$$\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx$$

になる。最後に半径 $\sqrt{2}$ の円の面積公式、または $x = \sqrt{2} \sin \theta$ による計算で積分値を求める。

【解答】

任意の実数 y に対して $y - 1 < [y] \leq y$ が成り立つ。ここで $y = \sqrt{2n^2 - k^2} = n\sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ とおくと

$$n\sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - 1 < [\sqrt{2n^2 - k^2}] \leq n\sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

である。これを n^2 で割って $k = 1, 2, \dots, n$ について足し合わせると

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{1}{n} < a_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

となる。

右端の和は、連続関数 $\sqrt{2-x^2}$ の区間 $[0, 1]$ におけるリーマン和である。したがって

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$$

である。また左右の差は $1/n$ で 0 に近づくので、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$$

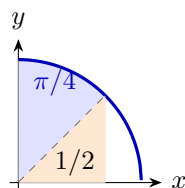
である。

この積分を計算する。 $x = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと、 $x = 0$ のとき $\theta = 0$ 、 $x = 1$ のとき $\theta = \pi/4$ である。また $dx = \sqrt{2} \cos \theta d\theta$ 、 $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2} \cos \theta$ だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} 2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ である。



▶ 解法 2 (格子点計数と領域面積)

【方針】

和を格子点の個数として読み替える。半径 $\sqrt{2}n$ の円内で $1 \leq k \leq n$ にある第 1 象限格子点を数え、 n 倍して得る細格子の領域面積へ帰着する。極限の面積は扇形と三角形に分ける。

【解答】

$$N_n = \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{2n^2 - k^2} \right]$$

とおく。これは整数格子点 (k, j) で

$$1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j, \quad k^2 + j^2 \leq 2n^2$$

を満たすものの個数である。座標を n で割ると、幅 $1/n$ の正方格子で

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

を内側から数えている。円弧と 2 本の線分からなる境界に接する小正方形は $O(n)$ 個であり、その総面積は $O(1/n)$ だから

$$\frac{N_n}{n^2} \rightarrow \text{Area}(\mathcal{R}).$$

左辺は a_n である。

領域 $\mathcal{R}$ を見ると、原点を中心、半径 $\sqrt{2}$ 、中心角 $\pi/4$ の扇形と、底辺・高さがともに 1 の直角三角形に分かれる。従って

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安は 18 分から 22 分。床関数の誤差が各項で 1 未満、全体では $n/n^2 = 1/n$ にしかならないことを明示するのが要点である。そこまで行けば標準的なリーマン和であり、端点が $k=1$ から始まることも極限には影響しない。積分計算では $x = \sqrt{2} \sin \theta$ と置くと、上端が $\pi/4$ になり、 $1/2 + \pi/4$ が自然に出る。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

立方体 X と球 Y があって、両者の体積は等しいとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、円周率は $\pi = 3.14 \dots$ である。

- (1) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。
- (2) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点を持つようにしたい。最大何個の辺が共通の点を持つようにできるか。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

立方体の一边を 1 に正規化し、等体積条件から球の半径 ρ を求める。 $1/2 < \rho < 5/8 < \sqrt{2}/2$ が使うべき大きさの比較である。(1) では隣り合う 2 頂点はいれられるが、任意の 3 頂点には距離 $\sqrt{2}$ 以上の 2 点が含まれるため不可能。(2) では、辺と球の内部が交わる条件を「球の中心からその辺までの距離が ρ より小さい」と言い換える。5 本の構成は辺の中点を中心に取ればよい。6 本不可能は、球中心を立方体内へ射影し、対称性で $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1/2$ として、6 本の辺までの距離がすべて $5/8$ 未満になることが矛盾することを示す。

【解答】

立方体の一边の長さを 1 とする。このとき立方体の体積は 1 である。等体積の球の半径を ρ とすると $\frac{4}{3}\pi\rho^3 = 1$ であるから $\rho^3 = \frac{3}{4\pi}$ である。 $\pi = 3.14 \dots$ より $\frac{1}{2} < \rho < \frac{5}{8}$ である。実際、 $\rho > 1/2$ は $3/(4\pi) > 1/8$ 、すなわち $6 > \pi$ から従い、 $\rho < 5/8$ は $3/(4\pi) < 125/512$ 、すなわち $1536 < 500\pi$ から従う。また $5/8 < \sqrt{2}/2$ である。

(1) 隣り合う 2 頂点を考え、その中点に球の中心を置けば、2 頂点までの距離は $\frac{1}{2}$ である。 $\rho > 1/2$ なので、この 2 頂点は球の内部に入る。したがって 2 個は可能である。

一方、立方体の任意の 3 頂点を取ると、その中には距離が少なくとも $\sqrt{2}$ である 2 点が含まれる。実際、1 つの頂点に隣接する頂点は 3 つしかなく、3 頂点をすべて互いに隣接させることはできないので、少なくとも面對角線以上に離れた 2 点が現れる。

2 点間の距離が $\sqrt{2}$ 以上なら、その 2 点をともに球の内部に入れるには、球の半径は $\sqrt{2}/2$ より大きくななければならない。しかし $\rho < \frac{5}{8} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。したがって 3 頂点を球の内部に入れることは不可能である。よって最大個数は 2 である。

(2) まず 5 本が可能であることを示す。立方体を $0 \leq x, y, z \leq 1$ と置き、球の中心を辺 $y = 1, z = 1, 0 \leq x \leq 1$ の中点 $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ に置く。この辺そのものは球の内部と共通点をもつ。また、この辺の両端から出る他の 4 本の辺については、中心からその端点までの距離が $\frac{1}{2}$ である。 $\rho > 1/2$ なので、これら 4 本の辺も球の内部と共通点をもつ。したがって合計 5 本は可能である。

次に 6 本以上は不可能であることを示す。球の中心が立方体の外にある場合、その点を立方体に最も近い点へ座標ごとに射影しても、立方体上の各点までの距離は増えない。したがって、6 本の辺と交わる可能性を調べる上では、球の中心が立方体内にあるとしてよい。

さらに立方体の対称性により、球の中心を (x, y, z) とし、 $0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{1}{2}$ としてよい。この点から 12 本の辺までの距離を考える。2 つの固定座標がともに 1 である辺までの距離は少なくとも $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} > 5/8$ である。また、対称性と $x \leq y \leq z$ から、6 番目までに小さくなり得る距離の 2 乗は、次の 6 つに含まれる。

$$x^2 + y^2, \quad x^2 + z^2, \quad y^2 + z^2, \quad x^2 + (1-y)^2, \quad x^2 + (1-z)^2, \quad y^2 + (1-z)^2$$

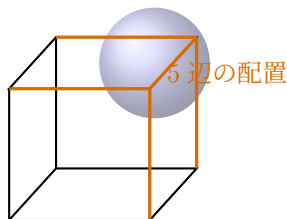
である。

もし 6 本の辺が球の内部と共通点をもつなら、中心からそれら 6 本の辺までの距離はすべて ρ より小さい。 $\rho < 5/8$ なので、上の 6 つはすべて $(5/8)^2 = 25/64$ より小さくしなければならない。

特に $y^2 + z^2 < \frac{25}{64}$ かつ $y^2 + (1-z)^2 < \frac{25}{64}$ である。これらを足すと $2y^2 + z^2 + (1-z)^2 < \frac{25}{32}$ である。ところが $z^2 + (1-z)^2 = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ だから $2y^2 < \frac{25}{32} - \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$ となり、 $y < \frac{3}{8}$ を得る。

一方、上の 6 つのうち $x^2 + (1-y)^2 < \frac{25}{64}$ も必要である。左辺は $(1-y)^2$ 以上なので $(1-y)^2 < \frac{25}{64}$ であり、 $0 \leq y \leq 1/2$ より $1-y < \frac{5}{8}$ すなわち $y > \frac{3}{8}$ となる。これは $y < 3/8$ と矛盾する。

したがって、6 本以上の辺が球の内部と共通点をもつことは不可能である。5 本は可能で、6 本は不可能なので、求める最大本数は 5 である。



▶ 解法 2 (第 6 近接辺の距離補題)

【方針】

一辺 1 の座標立方体に正規化して球半径を評価する。(1) は頂点間距離、(2) は第 6 近接辺までの距離の補題と 5 本の構成で処理する。

【解答】

球の半径を ρ とする。 $\frac{4}{3}\pi\rho^3 = 1$ と $\pi = 3.14\cdots$ から

$$\frac{1}{2} < \rho < \frac{5}{8} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1) 1 本の辺の中点に球の中心を置けば、その両端までの距離は $1/2 < \rho$ なので 2 頂点を内部に入れられる。立方体の任意の 3 頂点には、面对角線以上、すなわち距離 $\sqrt{2}$ 以上離れた 2 頂点が含まれる。この 2 点を同じ球の内部に入れるには $\rho > \sqrt{2}/2$ が必要で、上の評価に反する。従って最大は

2 個.

(2) 辺の中点に球の中心を置けば、その辺と両端から出る 4 辺、合計 5 辺が球の内部と共通点をもつので、5 本は可能である。

6 本が可能だと仮定する。球の中心は立方体内へ射影しても各辺までの距離が増えないため、立方体内にあるとしてよい。対称性により中心を

$$(x, y, z), \quad 0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{1}{2}$$

とする。この点から近い方の 6 本の辺までの距離の 2 乗は、順序を除いて

$$x^2 + y^2, \quad x^2 + z^2, \quad y^2 + z^2, \\ x^2 + (1-y)^2, \quad x^2 + (1-z)^2, \quad y^2 + (1-z)^2$$

以下の組から選ばれる。6 本すべてが球内部と交わるなら、特に

$$y^2 + z^2 < \frac{25}{64}, \quad y^2 + (1-z)^2 < \frac{25}{64}.$$

両式を加え、

$$z^2 + (1 - z)^2 \geq \frac{1}{2}$$

を使うと $y < 3/8$ を得る。一方、6 本目までを含めるには

$$x^2 + (1 - y)^2 < \frac{25}{64}$$

も必要で、これは $y > 3/8$ を与える。矛盾である。従って 6 本は不可能であり、最大は 5 本である。

【総評】 難度 8、計算量 7。 $1/2 < \rho < 5/8 < \sqrt{2}/2$ を先に確定。(1) は頂点間距離、(2) は辺との距離に直す。6 本不可能は $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1/2$ とし、 $y < 3/8$, $y > 3/8$ の矛盾を導く。