

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2001 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

点 P は、原点から出発し、直線 $y = x$ に沿って x 座標が増加する向きに動き始める。点 P が格子点に達すると、動く方向を変えることも変えないこともあるが、常にその格子点を通る傾き 1 または -1 の直線に沿って x 座標が増加する向きに進む。ただし、 P の y 座標は常に

$$0 \leq y \leq 3$$

の範囲にあるとする。

n を自然数とする。上の条件に従って P が原点から点 $(2n, 0)$ に到達するとき、 P がたどりうる経路の総数を a_n とおく。同様に、点 $(2n, 2)$ に到達するとき、 P がたどりうる経路の総数を b_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} および b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (2) $a_n + tb_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が等比数列となるような数 t をすべて求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

第 2 問

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

上に点 P をとる。ただし、 P は第 2 象限にあるとする。点 P における楕円の接線を l とし、原点 O を通り l に平行な直線を m とする。直線 m と楕円との交点のうち、第 1 象限にあるものを A とする。点 P を通り m に垂直な直線が m と交わる点を B とする。また、この楕円の焦点で x 座標が正であるものを F とする。点 F と点 P を結ぶ直線が m と交わる点を C とする。次の問いに答えよ。

(1) $OA \cdot PB = ab$ であることを示せ。

(2) $PC = a$ であることを示せ。

注（改題） 原典の (1) は $OP \cdot PB = ab$ と記載されているが、一般の楕円では成立しないため、 $OA \cdot PB = ab$ に訂正した。

第 3 問

座標平面上において、点 P と点 Q は時刻 0 から π まで、次の条件に従って動く。

点 P は点 $A(-1, 0)$ を出発し、原点 O を中心とする半径 1 の円周上を時計回りに動く。ただし、時刻 t で P は

$$\angle POA = t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

を満たす。点 P を通り x 軸に垂直な直線が直線 $y = -1$ と交わる点を H とする。

点 Q は P のまわりを反時計回りに

$$PQ = t \quad (0 \leq t \leq \pi), \quad \angle HPQ = t \quad (0 < t \leq \pi)$$

を満たすように動く。時刻 π における Q の位置を B とする。次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t における Q の座標を (x, y) とする。 x と y を t で表し、 y は t について単調に増加することを示せ。
- (2) 時刻 $\frac{j\pi}{6}$ と $\frac{(j+1)\pi}{6}$ の間で Q の x 座標が最大値をとるように整数 j を定めよ。
- (3) 点 A を通り y 軸に平行な直線、点 B を通り x 軸に平行な直線、および Q の軌跡で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)