

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2002 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする. このとき $a > 0$, $b > 0$ ならば, 少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ.

第 2 問

平面上に双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ を考える. $d < c < 0 < b < a$ を満たす数 a, b, c, d に対し, 曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S の x 座標がそれぞれ a, b, c, d であり, 四角形 $PQSR$ が長方形であるとする.

- (1) b, c, d を a を用いて表せ.
- (2) 線分 PR と x 軸との交点を T , 線分 QS と y 軸との交点を U とする. 線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) の範囲にあるとき, 3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
- (4) a が (2) の範囲を動くとき, $S(a)$ の増減を調べ, 最大値を求めよ.

第 3 問

α を $|\alpha| = 1$ である複素数とし、複素数列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2 \overline{z_{n-2}}}{4 \overline{z_{n-1}}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

で定める.

(1) 各 n に対し z_n を求めよ.

(2) $z_n = x_n + iy_n$ とし,

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とおくとき、次の無限級数の和をそれぞれ求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

第 4 問

$n \geq 7$ を満たす整数 n に対し、1つのさいころを投げる試行を n 回繰り返す. $2 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対し、「同じ目が出るどの2つの試行も k 以上離れている」という事象の確率を p_k とする. ただし i 番目と j 番目の試行は $|i - j|$ だけ離れているという.

- (1) p_2 を求めよ.
- (2) $k \geq 3$ のとき p_k を求めよ.
- (3) 同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど2だけ離れたものが少なくとも1組存在する確率を求めよ.

第 5 問

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と、点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし、 A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ l_A, l_B とする。2 直線にはさまれた領域のうち、 C_1 の外部で C_2 の内部にある部分を D_1 、 C_2 の外部で C_1 の内部にある部分を D_2 とする。 D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする。

- (1) $V_1(\alpha)$ と $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)