

大阪大学 2002 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき $a > 0$, $b > 0$ ならば、少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

3 つの実数解を r, s, t とおき、解と係数の関係から $r + s + t = -a < 0$, $rs + st + tr = b > 0$ を使う。負の解が 0 個なら和が負にならず矛盾する。負の解が 1 個だけと仮定し、 $-u, v, w$ $u, v, w > 0$ と書くと、和が負であることから $u > v + w$ が従う。一方、2 次の対称和が正であることから $vw > u(v + w)$ が必要になるが、これは $u > v + w$ と両立しない。

【解答】

3 つの異なる実数解を r, s, t とおく。解と係数の関係より $r + s + t = -a$, $rs + st + tr = b$ である。仮定 $a > 0$, $b > 0$ から $r + s + t < 0$, $rs + st + tr > 0$ である。

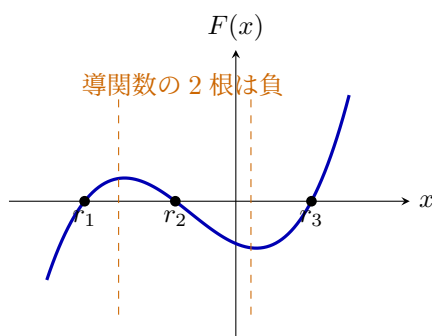
負の解が 1 つもないとすると、3 つの解はすべて 0 以上である。このとき $r + s + t \geq 0$ となり、 $r + s + t < 0$ に反する。したがって負の解は少なくとも 1 つ存在する。

次に、負の解がちょうど 1 つであると仮定する。解の順序を入れ替えて $r = -u$, $s = v$, $t = w$ と書ける。ただし $u > 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$ である。ここで $v = 0$ または $w = 0$ なら $rs + st + tr = -u(v + w) \leq 0$ となり、 $b > 0$ に反する。従って実際には $v > 0, w > 0$ である。

和について $r + s + t = -u + v + w < 0$ だから $u > v + w$ である。一方、2 次の対称和について $rs + st + tr = (-u)v + vw + (-u)w = vw - u(v + w)$ である。これが正であるから $vw > u(v + w)$ が必要である。

しかし $u > v + w$ より $u(v + w) > (v + w)^2$ であり、さらに $(v + w)^2 = v^2 + 2vw + w^2 > vw$ である。したがって $u(v + w) > vw$ となり、 $vw > u(v + w)$ と矛盾する。

よって負の解がちょうど 1 つであることも不可能である。以上より、負の実数解は少なくとも 2 つ存在する。



▶ 解法 2

【方針】

3 つの実根の間には、Rolle の定理により導関数の 2 根が 1 つずつ存在する。導関数は $3x^2 + 2ax + b$ であり、 $a, b > 0$ からその 2 根の和は負、積は正である。したがって 2 つの停留点はともに負であり、根の交互配置から元の方程式の小さい 2 根も負になる。

【解答】

3 次式を $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし、異なる 3 実根を

$$r_1 < r_2 < r_3$$

とする。Rolle の定理により、 $F'(x) = 0$ は (r_1, r_2) と (r_2, r_3) に少なくとも 1 根ずつもつ。 F' は 2 次式なので、その 2 根を $u_1 < u_2$ とすれば

$$r_1 < u_1 < r_2 < u_2 < r_3.$$

一方

$$F'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

解と係数の関係より

$$u_1 + u_2 = -\frac{2a}{3} < 0, \quad u_1 u_2 = \frac{b}{3} > 0.$$

積が正なので 2 根は同符号、和が負なので $u_1, u_2 < 0$ である。したがって $r_1 < u_1 < 0$ かつ $r_2 < u_2 < 0$ であり、 r_1, r_2 の少なくとも 2 根が負である。

【総評】 難度は 10 段階中 4、計算量は 3。目安時間は 11 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

Rolle の定理を使う解法では 3 根と導関数の 2 根の交互配置を明示すると結論が一意に読める。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 2 問】

平面上に双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ を考える。 $d < c < 0 < b < a$ を満たす数 a, b, c, d に対し、曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S の x 座標がそれぞれ a, b, c, d であり、四角形 $PQSR$ が長方形であるとする。

- (1) b, c, d を a を用いて表せ。
- (2) 線分 PR と x 軸との交点を T 、線分 QS と y 軸との交点を U とする。線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。
- (3) a が (2) の範囲にあるとき、3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (4) a が (2) の範囲を動くとき、 $S(a)$ の増減を調べ、最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は長方形が平行四辺形であることから、対角線の中点一致を使って 4 点の対称性を導き、さらに隣り合う辺の垂直条件から $ab = 1$ を出す。(2) は対角線上の点 T, U を求め、直線 TU と双曲線 $y = 1/x$ の交点の有無を 2 次方程式の判別式で調べる。(3) は曲線 QP と折れ線 $QUTP$ の間の面積として、直線部分の面積を積分で整理する。(4) は得られた $S(a)$ を微分し、(2) の範囲内で増減を判定する。

【解答】

(1) 各点は

$$P = \left(a, \frac{1}{a}\right), \quad Q = \left(b, \frac{1}{b}\right), \quad R = \left(c, \frac{1}{c}\right), \quad S = \left(d, \frac{1}{d}\right)$$

である。四角形 $PQSR$ が長方形であるから、まず平行四辺形であり、対角線の中点が一致する。したがって $P + S = Q + R$ が成り立つ。座標ごとに書くと $a + d = b + c$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ である。

第2式は $\frac{a+d}{ad} = \frac{b+c}{bc}$ である。第1式と合わせると、もし $a+d=b+c \neq 0$ なら $ad=bc$ となり、2数 a, d と b, c は和も積も等しいので同じ組になってしまう。これは $d < c < 0 < b < a$ に反する。よって $a+d=b+c=0$ でなければならない。したがって $d=-a, c=-b$ である。

次に、長方形であるから隣り合う辺 PQ と QS は垂直である。すなわち $\overrightarrow{PQ} = \left(b-a, \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right), \overrightarrow{QS} = \left(-a-b, -\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ の内積が0である。よって

$$(b-a)(-a-b) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

である。整理すると $(a^2-b^2) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$ すなわち $(a^2-b^2) \left(1 - \frac{1}{a^2b^2}\right) = 0$ である。 $a > b > 0$ なので $a^2-b^2 \neq 0$ であり、 $ab=1$ を得る。したがって $b=\frac{1}{a}, c=-\frac{1}{a}, d=-a$ である。また $b < a$ より $a > 1$ である。

(2) (1) より $P = \left(a, \frac{1}{a}\right), R = \left(-\frac{1}{a}, -a\right)$ である。直線 PR は傾き1であり、 $y = x - a + \frac{1}{a}$ と書ける。よって x 軸との交点は $T = \left(a - \frac{1}{a}, 0\right)$ である。

同様に、 $Q = \left(\frac{1}{a}, a\right), S = \left(-a, -\frac{1}{a}\right)$ を通る直線 QS は $y = x + a - \frac{1}{a}$ であるから、 y 軸との交点は $U = \left(0, a - \frac{1}{a}\right)$ である。

ここで $A = a - \frac{1}{a}$ とおく。 $a > 1$ より $A > 0$ である。直線 TU は $y = A - x$ である。この線分と双曲線 $y = 1/x$ が共通点をもたないためには、 $0 < x < A$ において $A - x = \frac{1}{x}$ が解をもたなければよい。これは $x(A-x) = 1$ すなわち $x^2 - Ax + 1 = 0$ が実数解をもたないことと同値である。したがって判別式より $A^2 - 4 < 0$ である。 $A > 0$ だから $0 < A < 2$ であり、 $0 < a - \frac{1}{a} < 2$ となる。 $a > 1$ と合わせて解くと $a^2 - 2a - 1 < 0$ より $1 < a < 1 + \sqrt{2}$ である。

(3) 以下、 $1 < a < 1 + \sqrt{2}$ とする。 $A = a - \frac{1}{a}$ とおく。求める部分は、双曲線の弧 QP と折れ線 $QUTP$ に囲まれた部分である。

双曲線の弧 QP の下の面積は

$$\int_{1/a}^a \frac{1}{x} dx = 2 \log a$$

である。一方、折れ線 $QUTP$ に沿う直線部分は $QU: y = x + A, UT: y = A - x, TP: y = x - A$ である。向きに注意して Q から U, T, P へ進むと、直線部分に対応する積分は

$$\int_{1/a}^0 (x+A) dx + \int_0^A (A-x) dx + \int_A^a (x-A) dx$$

である。これを計算すると

$$\int_{1/a}^0 (x+A) dx + \int_0^A (A-x) dx + \int_A^a (x-A) dx = \frac{a^2}{2} - 2 + \frac{3}{2a^2}$$

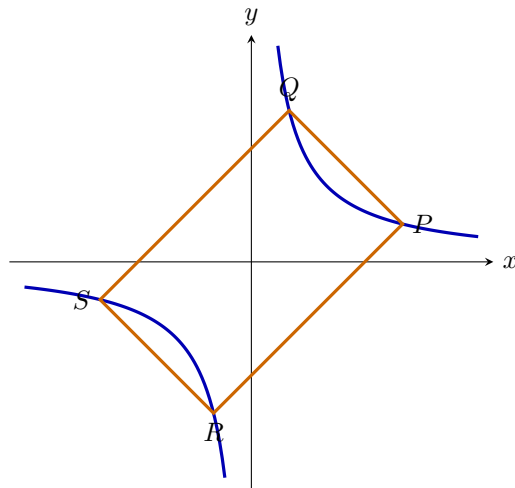
である。

したがって面積は $S(a) = 2 \log a - \left(\frac{a^2}{2} - 2 + \frac{3}{2a^2}\right)$ すなわち $S(a) = -\frac{a^2}{2} + 2 \log a + 2 - \frac{3}{2a^2}$ である。

(4) (3) の式を微分すると $S'(a) = -a + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^3}$ である。分母をそろえると $S'(a) = \frac{-a^4 + 2a^2 + 3}{a^3} = -\frac{(a^2-3)(a^2+1)}{a^3}$ である。 $a > 1$ では $a^3 > 0, a^2+1 > 0$ なので、符号は $-(a^2-3)$ の符号で決まる。

したがって $1 < a < \sqrt{3}$ で $S'(a) > 0, \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{2}$ で $S'(a) < 0$ である。よって $S(a)$ は $1, \sqrt{3}$ で増加し、 $\sqrt{3}, 1 + \sqrt{2}$ で減少する。最大は $a = \sqrt{3}$ のときである。

このとき $S(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2} + 2 \log \sqrt{3} + 2 - \frac{1}{2} = \log 3$ である。よって最大値は $\log 3$ である。



▶ 解法 2

【方針】

長方形の中心対称性と直交条件から 4 頂点を a だけで表す。その後 $a = e^u$ と置くと、交点なしの条件は $2 \sinh u < 2$ 、面積は指数式となる。 u による微分は因数分解しやすく、最大点 $e^{2u} = 3$ が直接得られる。

【解答】

(1) 長方形の対角線の中点一致から $P + S = Q + R$ 。 x 座標と y 座標へ適用すると

$$a + d = b + c, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

順序条件により共通の和は 0 でなければならず、 $d = -a, c = -b$ 。隣辺の内積を 0 とすると

$$(a^2 - b^2) \left(1 - \frac{1}{a^2 b^2} \right) = 0.$$

$a > b > 0$ より $ab = 1$ 。したがって

$$b = \frac{1}{a}, \quad c = -\frac{1}{a}, \quad d = -a, \quad a > 1.$$

(2) $A = a - 1/a$ とおくと $T = (A, 0), U = (0, A)$ 。線分 TU は $y = A - x$ であり、双曲線との交点条件は $x^2 - Ax + 1 = 0$ 。共通点がない条件は $A^2 < 4$ なので

$$1 < a < 1 + \sqrt{2}.$$

(3) 双曲線弧と 3 線分の符号付き面積を計算すると

$$S(a) = -\frac{a^2}{2} + 2 \log a + 2 - \frac{3}{2a^2}.$$

ここで $a = e^u$ とおけば

$$S(u) = -\frac{e^{2u}}{2} + 2u + 2 - \frac{3}{2}e^{-2u}.$$

(4)

$$\frac{dS}{du} = -e^{2u} + 2 + 3e^{-2u} = -\frac{(e^{2u} - 3)(e^{2u} + 1)}{e^{2u}}.$$

よって $u < \frac{1}{2} \log 3$ で増加、その後は減少する。範囲内の $a = \sqrt{3}$ で最大となり

$$S(\sqrt{3}) = \log 3.$$

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 8。目安時間は 23 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

長方形の頂点順 P, Q, S, R に注意する。面積積分の向きと開区間 $1 < a < 1 + \sqrt{2}$ の端点除外が重要である。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 3 問】

α を $|\alpha| = 1$ である複素数とし、複素数列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

で定める.

(1) 各 n に対し z_n を求めよ.

(2) $z_n = x_n + iy_n$ とし,

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とおくとき、次の無限級数の和をそれぞれ求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

▶ 解法 1

【方針】

共役を含む漸化式は、項そのものより比 $r_n = z_n/z_{n-1}$ を見ると扱いやすい。すると $r_n = \frac{\alpha^2}{4} \cdot 1/\overline{r_{n-1}}$ という漸化式になり、 $|\alpha| = 1$ を使って $r_n = \alpha^{2n}/2$ を帰納的に示せる。そこから z_n は比の積で求まる。(2) は $\alpha^3 = 1$ によって指数を 3 で割った余りで分類し、実部・虚部を 3 項周期の等比級数として足す。

【解答】

(1) $r_n = \frac{z_n}{z_{n-1}} \quad (n \geq 2)$ とおく。問題の条件より $r_2 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\alpha^4}{2}$ である。また $n \geq 3$ では

$$r_n = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{1}{\overline{r_{n-1}}}$$

である。

ここで $|\alpha| = 1$ だから $\overline{\alpha} = 1/\alpha$ である。 $r_{n-1} = \alpha^{2n-2}/2$ と仮定すると

$$\overline{r_{n-1}} = \frac{\overline{\alpha}^{2n-2}}{2} = \frac{\alpha^{-(2n-2)}}{2}$$

である。したがって $r_n = \frac{\alpha^2}{4} \cdot 2\alpha^{2n-2} = \frac{\alpha^{2n}}{2}$ となる。 $n = 2$ でも成り立つので、帰納法により $r_n = \frac{\alpha^{2n}}{2} \quad (n \geq 2)$ である。

よって $z_n = z_1 r_2 r_3 \cdots r_n = \frac{\alpha^{2(2+3+\cdots+n)}}{2^{n-1}}$ である。指数を計算すると $2(2+3+\cdots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = n(n+1) - 2$

だから $z_n = \frac{\alpha^{n(n+1)-2}}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ である。 $n = 1$ のときも右辺は 1 になり、 $z_1 = 1$ と一致する。

(2) $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$ である。したがって z_k に現れる $\alpha^{k(k+1)-2}$ は指数を 3 で割った余りだけで決まる。 k を 3 で割った余りで分類すると、 $k \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow k(k+1) - 2 \equiv 0 \pmod{3}$, $k \equiv 0, 2 \pmod{3} \Rightarrow k(k+1) - 2 \equiv 1 \pmod{3}$ である。よって $z_{3j+1} = \frac{1}{2^{3j}}$,

$$z_{3j+2} = \frac{\alpha}{2^{3j+1}}, \quad z_{3j+3} = \frac{\alpha}{2^{3j+2}}$$

である。ここで $j = 0, 1, 2, \dots$ とする。 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、実部の和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{3j}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{3j+1}} + \frac{1}{2^{3j+2}} \right) \right\}$$

である。中括弧内は

$$\frac{1}{2^{3j}} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2^{3j}} \cdot \frac{5}{8}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{5}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^j = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1-1/8} = \frac{5}{7}$$

である。

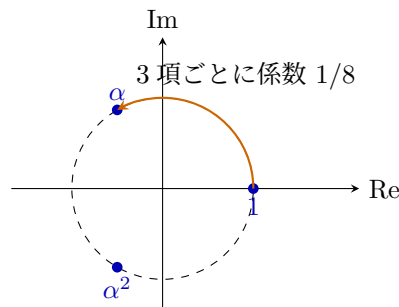
同様に虚部の和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{3j+1}} + \frac{1}{2^{3j+2}} \right)$$

である。よって

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3j}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-1/8} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

(1) は比 $r_n = z_n/z_{n-1}$ の偏角と絶対値を別々に追い、 $r_n = \alpha^{2n}/2$ を帰納する。(2) は実部・虚部を別々に足さず、3 項ずつまとめた複素級数を 1 本の等比級数として計算し、最後に実部と虚部を読む。

【解答】

(1) $r_n = z_n/z_{n-1}$ とおくと

$$r_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad r_n = \frac{\alpha^2}{4r_{n-1}}.$$

$|\alpha| = 1$ を用いる帰納法により

$$r_n = \frac{\alpha^{2n}}{2}.$$

したがって

$$z_n = \frac{\alpha^{n(n+1)-2}}{2^{n-1}}.$$

(2) 指定された α は $\alpha^3 = 1$ を満たす。 $j \geq 0$ に対して

$$z_{3j+1} = \frac{1}{2^{3j}}, \quad z_{3j+2} = \frac{\alpha}{2^{3j+1}}, \quad z_{3j+3} = \frac{\alpha}{2^{3j+2}}.$$

よって複素級数全体は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} z_k &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \alpha/2 + \alpha/4}{8^j} \\ &= \frac{1 + 3\alpha/4}{1 - 1/8} = \frac{5}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}i. \end{aligned}$$

実部・虚部を比較して

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{5}{7}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 5。目安時間は 17 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

共役を含む比では $\bar{\alpha} = 1/\alpha$ を用いる。無限級数は絶対収束するため 3 項ごとの整理が正当化できる。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 4 問】

$n \geq 7$ を満たす整数 n に対し、1 つのさいころを投げる試行を n 回繰り返す。 $2 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対し、「同じ目が出るどの 2 つの試行も k 以上離れている」という事象の確率を p_k とする。ただし i 番目と j 番目の試行は $|i - j|$ だけ離れているという。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) $k \geq 3$ のとき p_k を求めよ。
- (3) 同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

条件は「同じ目が近くに再出現しない」というものなので、各回で直前 $k - 1$ 回に出た目を禁止する数え上げにする。(1) の $k = 2$ は直前と同じ目が出ないだけである。(2) では $3 \leq k \leq 6$ のとき、最初の k 回はすべて異なり、その後は直前 $k - 1$ 個以外から選ぶ。 $k \geq 7$ では 7 回の中に同じ目が必ず現れ、その距離は 6 以下なので不可能。(3) は「連続同目なし」から「距離 2 の同目もなし」を引く余事象的な差で求める。

【解答】

(1) $k = 2$ の条件は、同じ目が出る 2 回の試行が少なくとも 2 だけ離れているということである。これは、隣り合う 2 回で同じ目が出ないことと同値である。

1 回目は 6 通りであり、2 回目以降は直前の目と異なる 5 通りを選べばよい。したがって条件を満たす出方は $6 \cdot 5^{n-1}$ 通りである。全事象は 6^n 通りなので $p_2 = \frac{6 \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である。

(2) まず $3 \leq k \leq 6$ とする。このとき、最初の k 回に同じ目が 2 回出ると、その 2 回の距離は高々 $k - 1$ であり条件に反する。したがって最初の k 回はすべて異なる必要がある。

最初の k 回の選び方は $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots (7 - k)$ 通りである。 $k + 1$ 回目以降は、直前の $k - 1$ 回に出た目を選ぶことができない。条件がここまで守られていれば、この直前 $k - 1$ 回の目はすべて異なるので、禁止される目は $k - 1$ 種類である。したがって各回で選べる目は $6 - (k - 1) = 7 - k$ 通りである。 $k + 1$ 回目から n 回目までは $n - k$ 回あるので、

$$p_k = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots (7 - k) \cdot (7 - k)^{n-k}}{6^n} \quad (3 \leq k \leq 6)$$

である。

この式は、従来の書き方では $\frac{6 \cdot 5 \cdots (8 - k)(7 - k)^{n-k+1}}{6^n}$ とまとめても同じである。

次に $k \geq 7$ とする。最初の 7 回の試行を考えると、さいころの目は 6 種類しかないから、同じ目が少なくとも 2 回出る。その 2 回の距離は最大でも 6 である。ところが $k \geq 7$ では、同じ目が出る 2 回は少なくとも k だけ離れていなければならないので不可能である。よって $p_k = 0$ ($7 \leq k \leq n$) である。

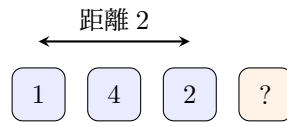
(3) 求める事象は、まず「同じ目が続くことはない」という条件を満たし、さらに「距離 2 で同じ目が出る組が少なくとも 1 組ある」というものである。

「同じ目が続くことはない」確率は p_2 である。一方、その中で「距離 2 で同じ目が出る組もない」ことは、同じ目が出るどの 2 回も少なくとも 3 だけ離れていること、すなわち $k = 3$ の条件である。したがって求める確率は $p_2 - p_3$ である。

(1), (2) より

$$p_2 = \frac{6 \cdot 5^{n-1}}{6^n}, \quad p_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4^{n-2}}{6^n}$$

なので、求める確率は $\frac{6 \cdot 5^{n-1} - 6 \cdot 5 \cdot 4^{n-2}}{6^n}$ である。



直前 $k - 1$ 種類を次から除外

▶ 解法 2

【方針】

条件を満たす長さ m の列の個数を N_m とする。最初の k 項は相異なり、その後は直前 $k - 1$ 個以外の目を選ぶので $N_m = (7 - k)N_{m-1}$ となる。これで p_k を一括して求め、(3) は $k = 2$ と $k = 3$ の事象の差として処理する。

【解答】

(1) 隣接する目だけを異ならせればよいので

$$p_2 = \frac{6 \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

(2) $3 \leq k \leq 6$ とする。最初の k 回はすべて異なるから

$$N_k = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots (7 - k).$$

その後は直前 $k - 1$ 種類を避け、各回 $7 - k$ 通りなので

$$p_k = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots (7 - k) (7 - k)^{n-k}}{6^n}.$$

$k \geq 7$ では最初の 7 回で同じ目が距離 6 以下に現れるため

$$p_k = 0.$$

(3) 隣接一致がない事象から、距離 2 の一致もない事象を除けばよい。したがって

$$p_2 - p_3 = \frac{6 \cdot 5^{n-1} - 6 \cdot 5 \cdot 4^{n-2}}{6^n}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 6。目安時間は 17 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

$k = 6$ ではその後の選択肢が 1 通り、 $k \geq 7$ では鳩の巣原理により 0 となる境目を明記する。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 5 問】

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と、点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし、 A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ l_A, l_B とする。2 直線にはさまれた領域のうち、 C_1 の外部で C_2 の内部にある部分を D_1 、 C_2 の外部で C_1 の内部にある部分を D_2 とする。 D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする。

- (1) $V_1(\alpha)$ と $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ求めよ。
 (2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$s = \sin \alpha, c = \cos \alpha$ と置く。円 C_2 と x 軸の交点は $x = \pm c$ で、対象はこの範囲の縦断面で考えられる。 $r(x) = \sqrt{1 - x^2}$ とすると、 C_1 の上端は r 、 C_2 の上端は $s + r$ 、下端は $s - r$ である。 D_1 の回転断面は外半径 $s + r$ 、内半径 r の差、 D_2 は外半径 r 、内半径 $r - s$ の差として積分する。最後は $V_1 - V_2 = 4\pi \cos \alpha \sin^2 \alpha$ を微分して最大化する。

【解答】

(1) $s = \sin \alpha, c = \cos \alpha$ とおく。 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $s > 0, c > 0$ である。

円 C_2 は中心 $(0, s)$ 、半径 1 の円だから、 x 軸との交点は $x^2 + s^2 = 1$ を満たす。したがって交点の x 座標は $x = \pm c$ であり、2 直線 l_A, l_B にはさまれる範囲は $-c \leq x \leq c$ である。

この範囲で $r(x) = \sqrt{1 - x^2}$ とおく。円 C_1 の上端は $y = r(x)$ 、下端は $y = -r(x)$ である。また円 C_2 の上端は $y = s + r(x)$ 、下端は $y = s - r(x)$ である。 $|x| \leq c$ では $r(x) \geq s$ なので、 $s - r(x) \leq 0$ である。

まず D_1 は、円 C_2 の内部で円 C_1 の外部にある部分である。縦断面で見ると、上側に $r(x) \leq y \leq s + r(x)$ の部分が現れる。これを x 軸のまわりに回転すると、断面積は $\pi\{(s + r(x))^2 - r(x)^2\}$ である。したがって

$$V_1(\alpha) = \pi \int_{-c}^c \{s^2 + 2sr(x)\} dx$$

である。

ここで

$$\int_{-c}^c \sqrt{1 - x^2} dx = cs + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

である。これは単位円の面積を、中心角または $x = \sin u$ の置換で計算すれば得られる。よって

$$V_1(\alpha) = \pi \left\{ 2cs^2 + 2s \left(cs + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$$

であり、 $V_1(\alpha) = \pi\{4cs^2 + s(\pi - 2\alpha)\}$ となる。すなわち

$$V_1(\alpha) = \pi\{4 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \sin \alpha (\pi - 2\alpha)\}$$

である。

次に D_2 は、円 C_1 の内部で円 C_2 の外部にある部分である。縦断面では下側に $-r(x) \leq y \leq s - r(x)$ の部分が現れる。これを回転すると、外半径は $r(x)$ 、内半径は $r(x) - s$ であるから、断面積は $\pi\{r(x)^2 - (r(x) - s)^2\}$ である。よって

$$V_2(\alpha) = \pi \int_{-c}^c \{2sr(x) - s^2\} dx$$

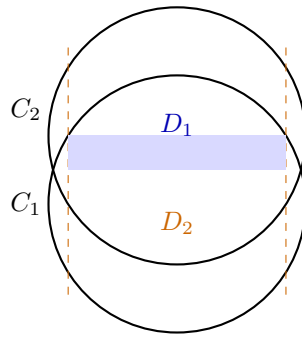
となる。上の積分値を用いると $V_2(\alpha) = \pi s(\pi - 2\alpha)$ である。

したがって $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi \cos \alpha \sin^2 \alpha$ である。

(2) $h(\alpha) = \cos \alpha \sin^2 \alpha$ とおく。すると $h'(\alpha) = -\sin \alpha \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ であるから $h'(\alpha) = \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$ である。 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ では $\sin \alpha > 0$ なので、符号は $2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ で決まる。 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を用いると、 $2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$ は $2(1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 0$ すなわち $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$ と同値である。このとき $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。 h' はこの点まで正、その後負になるので、 h はここで最大となる。よって

$$\max(V_1(\alpha) - V_2(\alpha)) = 4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

$s = \sin \alpha, c = \cos \alpha, r = \sqrt{1 - x^2}$ とする。 V_1 は円板差を通常通り積分する。一方、 $V_1 - V_2$ は 2 つの環状断面積を先に引くと $2\pi s^2$ という定数になり、積分せず幅 $2c$ を掛けるだけで求まる。

【解答】

(1) $|x| \leq c$ で $r = \sqrt{1 - x^2}$ とおく。 D_1 の回転断面積は

$$\pi\{(r + s)^2 - r^2\} = \pi(s^2 + 2sr).$$

また

$$\int_{-c}^c \sqrt{1 - x^2} dx = cs + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

だから

$$V_1(\alpha) = \pi\{4cs^2 + s(\pi - 2\alpha)\}.$$

D_2 の断面積は $\pi\{r^2 - (r - s)^2\} = \pi(2sr - s^2)$ 。したがって断面積の差は $2\pi s^2$ で一定であり

$$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 2\pi s^2 \cdot 2c = 4\pi \cos \alpha \sin^2 \alpha.$$

(2) $u = \sin^2 \alpha$ とおけば $0 < u < 1$ で

$$\{V_1 - V_2\}^2 = 16\pi^2 u^2(1 - u).$$

$u^2(1 - u)$ の導関数は $u(2 - 3u)$ だから $u = 2/3$ で最大。

$$\max(V_1 - V_2) = 4\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 7。目安時間は 20 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

回転断面で D_2 の内半径は $r - s$ である。差を先に取ると積分項が消える構造を確認する。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。