

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2003 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

定数 p, q, r は $p > q > r$ をみたしている. 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解は, 連続する 3 つの整数 $n - 1, n, n + 1$ であるとする. このとき, n の値と p, q, r を定めよ.

第 2 問

平面上において、点 O を始点とする 2 つの半直線を l_1, l_2 とし、それらのなす角は鋭角 θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする. 点 A は l_1 上の点で $OA = 1$, 点 B は l_2 上の点で $OB = b$ とする. 次に、直線 AB 上に点 O からおろした垂線と直線 AB の交点を P とする.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ によりベクトル $\overrightarrow{OP}$ を

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

とするとき、 t を b と θ を用いて表せ.

- (2) θ を固定し、 b を $b > 0$ の範囲で動かすとき、点 P が l_1, l_2 ではさまれる部分 (ただし l_1, l_2 も含む) にあるための b の範囲を求めよ.
- (3) b が (2) で求めた範囲で動くとき、点 P の描く軌跡と l_1, l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ.

第 3 問

n を 3 以上の自然数とする. 1 から $2n$ までの数字が書かれたカードがおのおの 1 枚ずつ, 全部で $2n$ 枚ある. 数字 m が書かれたカードを $[m]$ で表すとする. この $2n$ 枚のカードを横一列に並べる.

このとき, $[m]$ が極大であるとは, その両端のカードの数字が m より小さいことをいう. ただし, $[m]$ が列の左端にあるときには, その右隣のカードの数字が m より小さいことをいい, $[m]$ が列の右端にあるときには, その左隣のカードの数字が m より小さいことをいう.

- (1) $[2n]$ のみが極大である並べ方は何通りか.
- (2) $[n]$ と $[2n]$ のみが極大である並べ方のうち, これら 2 枚には含まれたカードの数字の中で最小のものが k となる並べ方は何通りか. n と k を用いて表せ.
- (3) $[n]$ と $[2n]$ のみが極大であるカードの並べ方の総数を $P(n)$ とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{a^n}$$

が 0 でない数に収束するような定数 a の値と, そのときの極限値を求めよ.

第 4 問

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin \pi t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2I_2 + \dots + u^nI_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0, I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう． π が無理数でないとし，正の整数 p, q によって $\pi = \frac{p}{q}$ として表されたと仮定する． $A_0 = I_0, A_n = p^n I_n$ とおくとき， $A_0, A_1, A_2, \dots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)