

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2003 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である. また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

第 2 問

- (1) $0 < t < 1$ のとき, 不等式 $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ.
- (2) k を正の定数とする. $a > 0$ とし, 曲線 $C: y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ を考える. このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ.

第 3 問

- (1) $f(x)$ を x の整式とし, $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$$

をみたす数列とする. このとき $f(a_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

- (2) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を x の整式とし $F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$ はすべての実数 x に対して 0 であるとする. このとき $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

第 4 問

数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $a_{kl} = a_k + a_l$, $k = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$ をみたすとする.

- (1) k, l を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき $l^{m-1} \leq k^n < l^m$ をみたす自然数 m が存在することを示せ.
- (2) k, l を 2 以上の自然数とすると $-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.

第 5 問

- (1) 平面上において座標軸に平行な主軸 (長軸, 短軸) をもち, x 軸, y 軸の両方に接する楕円を考える. その中心の x 座標を a とする. このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ. ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする.
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して, その 2 つの楕円の中心を B, C とする. $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)