

大阪大学 2003 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である. また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず漸化式の指数部分だけを追い, $z_n = w^{n^2}$ を求める. (1) は偏角 $5n^2^\circ$ が 180° の整数倍になる条件に直す. (2) は OP_n, OP_{n+1} の長さ, 原点での角 $5(2n+1)^\circ$ を使い, 直角二等辺三角形では原点の角が 90° または 45° に限られることから候補を絞る.

【解答】

(1) $z_n = w^{e_n}$ と書く. 条件 $z_1 = w$ より $e_1 = 1$ であり, 漸化式 $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ から $e_{n+1} = e_n + 2n + 1$ である. したがって $e_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ となる. よって $z_n = w^{n^2} = a^{n^2} \{\cos(5n^2)^\circ + i \sin(5n^2)^\circ\}$ である. z_n が実数であるための必要十分条件は, 偏角 $5n^2^\circ$ が 180° の整数倍であることである. すなわち $180 \mid 5n^2$ であり, これは $36 \mid n^2$ と同値である. $36 = 2^2 \cdot 3^2$ だから, $36 \mid n^2$ は $6 \mid n$ と同値である. したがって z_n が実数 $\iff n$ は 6 の倍数 である.

(2) 点 P_n の原点からの距離は $OP_n = |z_n| = a^{n^2}$ である. また P_n と P_{n+1} の偏角の差は $5\{(n+1)^2 - n^2\}^\circ = 5(2n+1)^\circ$ である. $1 \leq n \leq 17$ では $15^\circ \leq 5(2n+1)^\circ \leq 175^\circ$ なので, これがそのまま $\angle P_n OP_{n+1}$ である.

直角二等辺三角形の角は $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ である. したがって, 原点 O の角が直角である場合は $5(2n+1) = 90$ が必要である. しかしこれは $2n+1 = 18$ を与え, 整数 n は存在しない.

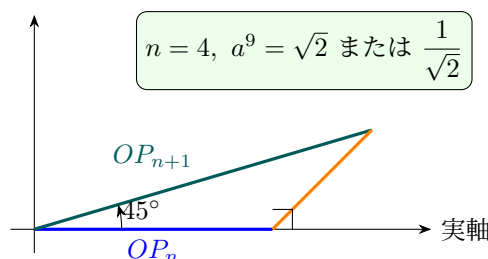
よって原点の角は 45° でなければならない. したがって $5(2n+1) = 45$ より $n = 4$ を得る.

このとき $\frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}} = a^{2n+1} = a^9$ である. 原点の角が 45° の直角二等辺三角形では, 原点から出る 2 辺の長さの比は $\sqrt{2}$ または $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である. したがって $a^9 = \sqrt{2}$ または $a^9 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる.

以上より

$$n = 4, a = \sqrt[9]{2} \text{ または } \frac{1}{\sqrt[9]{2}}$$

である.



▶ 解法 2 (複素数の辺比で直角を判定する)

【方針】

まず $z_n = w^{n^2}$ を得る。(2) では相似比 $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ を使い、直角の頂点が O, P_n, P_{n+1} の各場合に「一方の辺ベクトルが他方の $\pm i$ 倍」という条件を課す。

【解答】

(1) 指数を足し上げると

$$z_n = w^{1+3+\cdots+(2n-1)} = w^{n^2}.$$

したがって偏角は $5n^2^\circ$ である。実数条件は

$$5n^2 \equiv 0 \pmod{180},$$

すなわち $36 \mid n^2$ であり、これは $6 \mid n$ と同値である。

(2)

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = w^{2n+1} = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad r = a^{2n+1}, \quad \phi = 5(2n+1)^\circ.$$

$1 \leq n \leq 17$ では $15^\circ \leq \phi \leq 175^\circ$ である。

直角が O にあるなら、2本の位置ベクトルは等長かつ直交するので

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \pm i.$$

よって $r = 1$ 、 $\phi = 90^\circ$ が必要だが、 $5(2n+1) = 90$ を満たす整数 n はない。

直角が P_n にあるなら、等しい2辺は $-z_n$ と $z_{n+1} - z_n$ である。したがって

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = \pm i, \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1 \pm i.$$

許される偏角から

$$\phi = 45^\circ, \quad r = \sqrt{2}.$$

よって $n = 4$ 、 $a^9 = \sqrt{2}$ である。

直角が P_{n+1} にある場合は同様に

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 \pm i$$

となり、

$$\phi = 45^\circ, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって

$$n = 4, \quad a = \sqrt[18]{2} \text{ または } a = \frac{1}{\sqrt[18]{2}}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 15～20 分。採点ポイントは、漸化式から $z_n = w^{n^2}$ を出すこと、実数条件を $36 \mid n^2$ に変換すること、直角二等辺三角形の角の可能性を 90° と 45° に分けて調べることです。

誤りやすいのは、 $P_n P_{n+1}$ の長さを直接計算しようとして複雑にすることです。まず原点から見た2つの点の角度差を決めれば、直角二等辺の候補はほぼ $n = 4$ に絞られます。最後に、直角が P_n 側か P_{n+1} 側かで長さの比が $\sqrt{2}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の2通りになる点を忘れないことが重要です。

第1解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第2解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を独立に確認する。図は条件の役割と解法の流れを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

- (1) $0 < t < 1$ のとき、不等式 $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。
 (2) k を正の定数とする。 $a > 0$ とし、曲線 $C: y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は示したい不等式を、 $t = 1$ で 0 になる関数の正値性に直して微分で示す。(2) は 2 本の接線の交点の x 座標を式で求め、 $A = ka$ 、 $t = e^{-2A}$ と置いて (1) の不等式と同じ形を作る。分母が正であることもあわせて確認する。

【解答】

(1) 示したい不等式は $\log t < -\frac{2(1-t)}{1+t}$ と同値である。そこで $F(t) = -\frac{2(1-t)}{1+t} - \log t$ とおく。 $0 < t < 1$ において

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{4}{(1+t)^2} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{4t - (1+t)^2}{t(1+t)^2} \\ &= -\frac{(t-1)^2}{t(1+t)^2} < 0 \end{aligned}$$

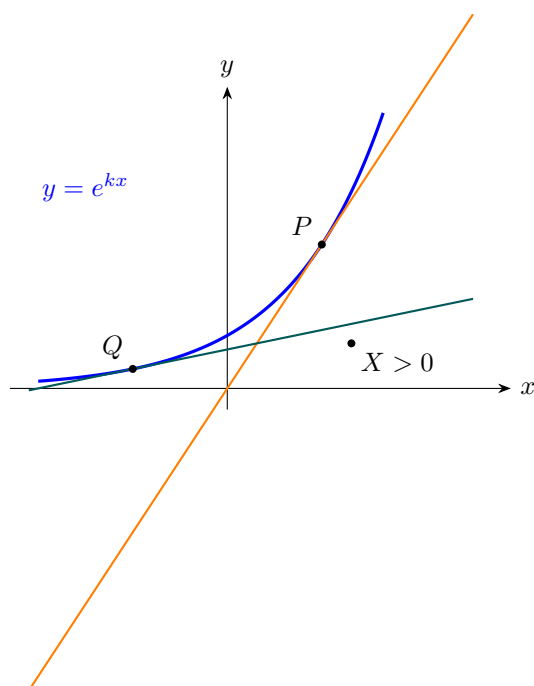
である。また $F(1) = 0$ である。 F は増加する t に対して減少するので、 $0 < t < 1$ では $F(t) > F(1) = 0$ となる。よって $\log t < -\frac{2(1-t)}{1+t}$ であり、両辺を 2 で割って $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$ が成り立つ。

(2) 曲線 $y = e^{kx}$ の導関数は $y' = ke^{kx}$ である。したがって、点 $P(a, e^{ka})$ における接線は $y = e^{ka} + ke^{ka}(x - a)$ であり、点 $Q(-a, e^{-ka})$ における接線は $y = e^{-ka} + ke^{-ka}(x + a)$ である。

この 2 直線の交点の x 座標を X とする。2 つの接線の y 座標を等しくすると $e^{ka}\{1 + k(X - a)\} = e^{-ka}\{1 + k(X + a)\}$ である。ここで $A = ka > 0$ とおくと $e^A(1 - A + kX) = e^{-A}(1 + A + kX)$ である。整理して $kX(e^A - e^{-A}) = e^{-A}(1 + A) - e^A(1 - A)$ を得る。両辺を e^A で割ると $kX(1 - e^{-2A}) = A - 1 + (1 + A)e^{-2A}$ である。

ここで $t = e^{-2A}$ とおくと、 $A > 0$ より $0 < t < 1$ であり、 $A = -\frac{1}{2} \log t$ である。(1) より $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$ だから $A > \frac{1-t}{1+t}$ である。よって $A(1+t) > (1-t)$ であり、これは $A - 1 + (1 + A)t > 0$ を意味する。すなわち $A - 1 + (1 + A)e^{-2A} > 0$ である。

一方、 $k > 0$ かつ $1 - e^{-2A} > 0$ である。したがって $X > 0$ であり、接線の交点の x 座標は常に正である。



▶ 解法 2 (対称な積分評価を使う)

【方針】

(1) は $-\log t$ を $\frac{1}{x}$ の積分とみなし、区間内の対称な 2 点で逆数を組にして相加相乗平均を使う。(2) は接線の交点を求め、得られた分子を (1) と同じ不等式へ変形する。

【解答】

(1)

$$-\log t = \int_t^1 \frac{dx}{x}.$$

x と $1+t-x$ はともに正で、和は $1+t$ である。相加相乗平均から

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1+t-x} \geq \frac{4}{1+t},$$

等号は $x = \frac{1+t}{2}$ の 1 点でしか起こらない。区間を対称な 2 点ずつ組にして積分すると

$$\begin{aligned} -\log t &= \frac{1}{2} \int_t^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+t-x} \right) dx \\ &> \frac{1}{2} \int_t^1 \frac{4}{1+t} dx = \frac{2(1-t)}{1+t}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}.$$

(2) $A = ka > 0$ とする。2 本の接線を連立し、その交点の x 座標を X とすると

$$kX = \frac{A-1+(1+A)e^{-2A}}{1-e^{-2A}}.$$

分母は正である。 $t = e^{-2A}$ とおけば

$$A = -\frac{\log t}{2} > \frac{1-t}{1+t}$$

だから

$$A(1+t) - (1-t) > 0.$$

左辺は

$$A-1+(1+A)e^{-2A}$$

に等しい。したがって $kX > 0$ であり、 $k > 0$ より

$$X > 0$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 14~18 分。採点ポイントは、(1) の不等式を関数 $F(t)$ の符号に変えること、(2) で接線の交点の x 座標を正確に式にすること、 $t = e^{-2ka}$ によって誘導の不等式を使う形へ持ち込むことです。

誤りやすいのは、(1) の微分の符号と区間 $0 < t < 1$ での大小関係を逆にすることです。また (2) では分子だけでなく、 $k(1 - e^{-2ka})$ が正であることも確認しなければ $X > 0$ とは結論できません。誘導問題なので、(1) の形に合わせる置換を見つけることが最も重要です。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を独立に確認する。図は条件の役割と解法の流れを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

- (1) $f(x)$ を x の整式とし、 $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$$

をみたす数列とする. このとき $f(a_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

- (2) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を x の整式とし $F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$ はすべての実数 x に対して 0 であるとする. このとき $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は、0 でない整式が次数より多くの相異なる根をもてないことを使う。(2) はまず $x = k\pi$ を代入して f_1 を消す。次に $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ を用い、 $\cos x = \frac{1}{2}$ と $\cos x = -\frac{1}{2}$ になる無限列を代入して $f_2 + f_3$ と $f_2 - f_3$ をそれぞれ 0 にする。

【解答】

(1) $f(x)$ が 0 でない整式であると仮定する。その次数を d とすれば、方程式 $f(x) = 0$ の実数解は高々 d 個である。

一方、条件より $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ であり、 a_k は互いに異なる。さらにすべての k について $f(a_k) = 0$ であるから、 $f(x) = 0$ は無限に多くの実数解をもつことになる。これは 0 でない整式について不可能である。したがって $f(x)$ は整式として 0 である。

(2) まず、任意の正の整数 k について $x = k\pi$ を代入する。このとき $\sin k\pi = 0$, $\sin 2k\pi = 0$ であるから $f_1(k\pi) = 0$ である。数列 $k\pi$ は単調に増加し、限りなく大きくなるので、(1) より $f_1(x) = 0$ が整式として成り立つ。

したがって、すべての実数 x について $f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x = 0$ である。 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ より、 $\sin x \neq 0$ のとき $f_2(x) + 2f_3(x) \cos x = 0$ である。

次に $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を代入する。このとき $\sin x \neq 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$ であるから $f_2(x) + f_3(x) = 0$ が無限に多くの x で成り立つ。したがって (1) より $f_2(x) + f_3(x) = 0$ が整式として成り立つ。

また $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を代入すると、 $\sin x \neq 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ であるから $f_2(x) - f_3(x) = 0$ が無限に多くの x で成り立つ。再び (1) より $f_2(x) - f_3(x) = 0$ が整式として成り立つ。

2 つの恒等式 $f_2 + f_3 = 0$, $f_2 - f_3 = 0$ を加減すれば $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ である。よって $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ はいずれも整式として 0 である。

$$\boxed{x = k\pi} \xrightarrow{\sin x = \sin 2x = 0} \boxed{f_1 \equiv 0}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \xrightarrow{\sin x = 1} \boxed{f_2 \equiv 0}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \xrightarrow{\sin 2x \neq 0} \boxed{f_3 \equiv 0}$$

▶ 解法 2 (位相を順に固定して消去する)

【方針】

(1) の結論を用い、まず $x = k\pi$ で f_1 を消す。次に $\sin 2x = 0$ かつ $\sin x \neq 0$ となる無限列で f_2 を消し、最後に $\sin 2x \neq 0$ となる無限列で f_3 を消す。

【解答】

(1) 0 でない d 次整式がもつ相異なる実数解は高々 d 個である。ところが $a_1 < a_2 < \dots$ なので a_k は相異なり、 $f(a_k) = 0$ は無限個の根を与える。したがって f は零整式である。

(2) すべての整数 $k \geq 1$ について $x = k\pi$ を代入すると

$$f_1(k\pi) = 0.$$

$k\pi$ は狭義増加して無限大へ向かうから、(1) より

$$f_1(x) \equiv 0.$$

次に

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とおく。このとき $\sin x = 1$ 、 $\sin 2x = 0$ なので

$$f_2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

再び (1) より

$$f_2(x) \equiv 0.$$

最後に

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと $\sin 2x = 1$ である。残った恒等式

$$f_3(x) \sin 2x = 0$$

から、この無限列上で $f_3(x) = 0$ となる。(1) より

$$f_3(x) \equiv 0.$$

よって 3 つの整式はいずれも零整式である。

【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 14~18 分。採点ポイントは、(1) の「相異なる根が無限にある整式は 0」という事実を明確に使うこと、(2) で代入する無限列を目的別に選ぶこと、最後に $f_2 + f_3$ と $f_2 - f_3$ から $f_2 = f_3 = 0$ を結論することです。

誤りやすいのは、 $\sin x$ で割る場面で $\sin x = 0$ の点を含めてしまうことです。ここでは $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ にずらした無限列を使うので、 $\sin x \neq 0$ が保証されています。証明の流れは、まず f_1 、次に f_2, f_3 の順に消していくと整理しやすくなります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を独立に確認する。図は条件の役割と解法の流れを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $a_{kl} = a_k + a_l$, $k = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$ をみたすとする.

- (1) k, l を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき $l^{m-1} \leq k^n < l^m$ をみたす自然数 m が存在することを示せ.
- (2) k, l を 2 以上の自然数とすると $-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は l^m が限りなく大きくなることから、 $k^n < l^m$ を満たす最小の m を取る。(2) は $a_{k^n} = na_k$ 、 $a_{l^m} = ma_l$ と単調性を組み合わせ、 $\frac{a_k}{a_l}$ と $\frac{\log k}{\log l}$ が同じ長さ $\frac{1}{n}$ の区間に入ることを示す。(3) は $l = 2$ として任意の n で誤差が $\frac{1}{n}$ 未満であることから等号を得て、最後に $k = 1$ も確認する。

【解答】

(1) $l \geq 2$ であるから、数列 $l, l^2, l^3, \dots$ は限りなく大きくなる。したがって、与えられた自然数 n に対して $k^n < l^m$ を満たす自然数 m が存在する。

そのような m のうち最小のものを取る。この最小性より、 $m = 1$ なら $l^{m-1} = 1 \leq k^n$ であり、 $m \geq 2$ なら $m - 1$ は条件 $k^n < l^{m-1}$ を満たさないのだから $l^{m-1} \leq k^n < l^m$ を満たす自然数 m が存在する。

(2) 条件 $a_{kl} = a_k + a_l$ を繰り返し用いると $a_{k^n} = na_k$, $a_{l^m} = ma_l$ である。また $l \geq 2$ なので $l^2 > l$ であり、単調性から $a_{l^2} > a_l$ である。一方 $a_{l^2} = a_l + a_l = 2a_l$ だから $a_l > 0$ である。

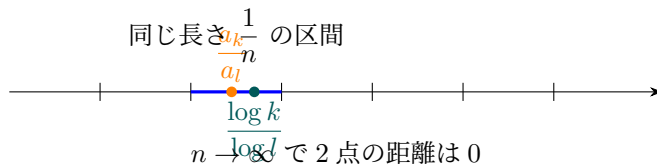
(1) で得た m に対して $l^{m-1} \leq k^n < l^m$ が成り立つ。数列 $\{a_k\}$ は増加するので $a_{l^{m-1}} \leq a_{k^n} < a_{l^m}$ である。これを $a_{k^n} = na_k$ 、 $a_{l^{m-1}} = (m-1)a_l$ 、 $a_{l^m} = ma_l$ と書き直すと $(m-1)a_l \leq na_k < ma_l$ である。 $a_l > 0$ で割って $\frac{m-1}{n} \leq \frac{a_k}{a_l} < \frac{m}{n}$ を得る。

一方、(1) の不等式に対数を取ると $(m-1)\log l \leq n \log k < m \log l$ である。 $l \geq 2$ より $\log l > 0$ だから $\frac{m-1}{n} \leq \frac{\log k}{\log l} < \frac{m}{n}$ である。

したがって $\frac{a_k}{a_l}$ と $\frac{\log k}{\log l}$ は、どちらも $\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right)$ という長さ $\frac{1}{n}$ の区間に入る。よって $-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}$ が成り立つ。

(3) (2) で $l = 2$ とする。 $k \geq 2$ について、任意の自然数 n に対して $-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_2} - \frac{\log k}{\log 2} < \frac{1}{n}$ が成り立つ。もし $\frac{a_k}{a_2} - \frac{\log k}{\log 2}$ が 0 でないなら、その絶対値を $\delta > 0$ として、 $n > \frac{1}{\delta}$ を取ると上の不等式に反する。したがって $\frac{a_k}{a_2} = \frac{\log k}{\log 2}$ である。

$a_2 = a$ より、 $k \geq 2$ では $a_k = a \frac{\log k}{\log 2}$ である。また $k = l = 1$ を $a_{kl} = a_k + a_l$ に代入すると $a_1 = a_1 + a_1$ より $a_1 = 0$ である。これは上の式に $k = 1$ を入れた値 $a \frac{\log 1}{\log 2} = 0$ と一致する。よって一般項は $a_k = a \frac{\log k}{\log 2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) である。



▶ 解法 2 (2 の冪で直接はさむ)

【方針】

(1) の最小整数を床関数で表す。(3) では (2) の一般論を経由せず、任意の k に対して $2^{r_n} \leq k^n < 2^{r_n+1}$ と置き、単調性で na_k をはさんで極限を取る。

【解答】

(1)

$$m = \left\lfloor n \frac{\log k}{\log l} \right\rfloor + 1$$

とおけば

$$m - 1 \leq n \frac{\log k}{\log l} < m.$$

$\log l > 0$ なので指数へ戻して

$$l^{m-1} \leq k^n < l^m$$

を得る。

(2) $a_{rj} = ja_r$ は条件を繰り返せば従う。また

$$a_{l^2} = 2a_l > a_l$$

より $a_l > 0$ である。(1) と単調性から

$$(m-1)a_l \leq na_k < ma_l.$$

一方、(1) の対数を取れば

$$\frac{m-1}{n} \leq \frac{\log k}{\log l} < \frac{m}{n}.$$

したがって

$$\left| \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} \right| < \frac{1}{n}.$$

(3) $a_2 = a$ とする。狭義増加性と $a_4 = 2a_2$ から $a > 0$ である。固定した $k \geq 2$ と自然数 n に対し

$$r_n = \lfloor n \log_2 k \rfloor$$

とおくと

$$2^{r_n} \leq k^n < 2^{r_n+1}.$$

よって

$$r_n a \leq na_k < (r_n + 1)a.$$

$na > 0$ で割ると

$$\frac{r_n}{n} \leq \frac{a_k}{a} < \frac{r_n + 1}{n}.$$

両端はともに $\log_2 k$ へ収束するので

$$a_k = a \log_2 k = a \frac{\log k}{\log 2}.$$

また $a_1 = a_1 + a_1$ より $a_1 = 0$ で、同じ式に含まれる。

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 24~30 分。採点ポイントは、(1) で最小の m を取る発想、(2) で単調性と $a_{k^n} = na_k$ をつなげること、 $a_l > 0$ を確認してから割り算すること、(3) で任意の n に対する評価から等号へ持ち込むことです。

誤りやすいのは、(2) の不等式を「だいたい同じ」と説明してしまい、同じ長さ $\frac{1}{n}$ の区間に入るという根拠を書かないことです。また (3) では $k \geq 2$ で得た式をそのまま一般項として終えず、 $a_1 = 0$ を別に確認する必要があります。対数関数を先に仮定するのではなく、単調性と乗法的な条件から対数形を押し出す問題です。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を独立に確認する。図は条件の役割と解法の流れを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

- (1) 平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち， x 軸， y 軸の両方に接する楕円を考える．その中心の x 座標を a とする．このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ．ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする．
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする． $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ．

▶ 解法 1

【方針】

楕円の中心を (a, c) とおき，両座標軸に接する条件から半径方向の長さを $|a|, |c|$ と表す．(1) は点 $(1, 2)$ を通る条件を， $\frac{(2-c)^2}{c^2}$ が非負実数として実現できるかに帰着する．(2) はその値を $v = \frac{2a-1}{a^2}$ とおき，2 つの中心の y 座標差から面積 $S(a)$ を求める．最後に定義域を確認し，左右の区間で微分してグラフの概形を決める．

【解答】

(1) 楕円の中心を (a, c) とおく．座標軸に平行な主軸をもち， y 軸に接するため，横方向の半径は $|a|$ である．また x 軸に接するため，縦方向の半径は $|c|$ である．したがって楕円は $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{c^2} = 1$ と書ける．ただし $a \neq 0, c \neq 0$ である．

この楕円が点 $A(1, 2)$ を通る条件は $\frac{(1-a)^2}{a^2} + \frac{(2-c)^2}{c^2} = 1$ である．ここで第 2 項は常に 0 以上である．また任意の $w \geq 0$ に対して $\frac{(2-c)^2}{c^2} = w$ を満たす実数 $c \neq 0$ は存在する．実際， $w \geq 0$ として $\frac{2-c}{c} = \pm\sqrt{w}$ とおけばよく，少なくとも一方から $c = \frac{2}{1 \pm \sqrt{w}}$ が得られる．

したがって，点 A を通る楕円が存在するための必要十分条件は $1 - \frac{(1-a)^2}{a^2} \geq 0$ である．これは $(1-a)^2 \leq a^2$ と同値であり，整理すると $1 - 2a \leq 0$ である．よって $a \geq \frac{1}{2}$ である．

(2) (1) の式で $v = 1 - \frac{(1-a)^2}{a^2} = \frac{2a-1}{a^2}$ とおく．点 A を通る楕円がちょうど 2 つ存在するには，方程式 $\frac{(2-c)^2}{c^2} = v$ が c についてちょうど 2 つの解をもてばよい．

(1) より存在には $a \geq \frac{1}{2}$ が必要である． $a = \frac{1}{2}$ では $v = 0$ となり， $c = 2$ の 1 つだけである．また $v = 1$ となるのは $\frac{2a-1}{a^2} = 1$ すなわち $(a-1)^2 = 0$ より $a = 1$ のときで，このときも $c = 1$ の 1 つだけである．したがって，ちょうど 2 つ存在するのは $a > \frac{1}{2}$ ， $a \neq 1$ のときである．

この範囲では $0 < v < 1$ であり，2 つの解は $c_1 = \frac{2}{1+\sqrt{v}}$ ， $c_2 = \frac{2}{1-\sqrt{v}}$ である．2 つの中心 B, C は同じ直線 $x = a$ 上にあるので

$$\begin{aligned} BC &= \left| \frac{2}{1-\sqrt{v}} - \frac{2}{1+\sqrt{v}} \right| \\ &= \frac{4\sqrt{v}}{1-v}. \end{aligned}$$

ここで $a > \frac{1}{2}$ なので $a > 0$ であり，

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{2a-1}}{a}, \quad 1-v = 1 - \frac{2a-1}{a^2} = \frac{(a-1)^2}{a^2}$$

である．したがって $BC = \frac{4a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$ である．

点 $A(1, 2)$ から直線 $x = a$ までの距離は $|a - 1|$ であるから、三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} BC |a - 1| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2} \cdot |a-1| \\ &= \frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}. \end{aligned}$$

よって定義域は $a > \frac{1}{2}$, $a \neq 1$ であり、 $S(a) = \frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$ である。

グラフを調べる。まず $\frac{1}{2} < a < 1$ では $S(a) = \frac{2a\sqrt{2a-1}}{1-a}$ である。このとき $S'(a) = -\frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)^2\sqrt{2a-1}}$ である。区間 $\frac{1}{2} < a < 1$ では $a^2 - 3a + 1 < 0$ なので $S'(a) > 0$ である。したがってこの枝は単調増加し、 $a \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ で $S(a) \rightarrow 0$, $a \rightarrow 1 - 0$ で $S(a) \rightarrow \infty$ である。

次に $a > 1$ では $S(a) = \frac{2a\sqrt{2a-1}}{a-1}$ である。このとき $S'(a) = \frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)^2\sqrt{2a-1}}$ である。 $a > 1$ で $a^2 - 3a + 1 = 0$ となるのは $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ だけである。したがって、 $1 < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ では減少し、 $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ では増加する。

最小値は

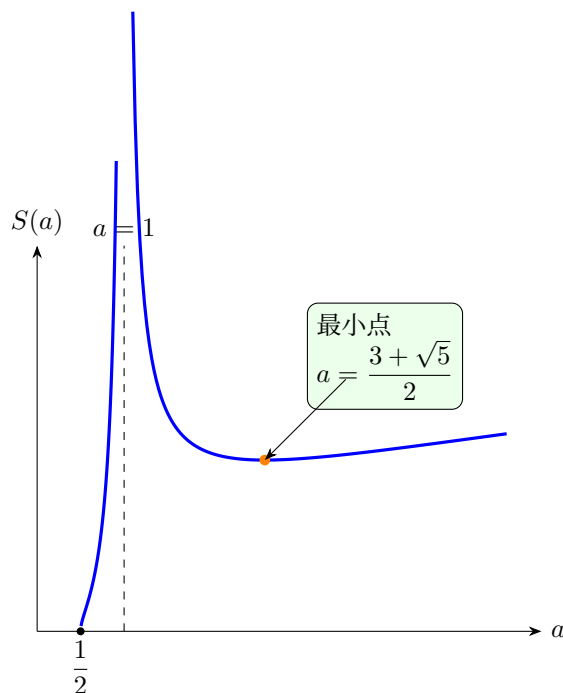
$$\begin{aligned} S\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sqrt{2+\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= (1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。また

$$a \rightarrow 1 + 0 \text{ で } S(a) \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow \infty \text{ で } S(a) \rightarrow \infty$$

である。

以上より、グラフは次の特徴をもつ。定義域は $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$ 。左の枝は $(\frac{1}{2}, 1)$ で単調増加し、 $a = 1$ を縦の漸近線として無限大に発散する。右の枝は $a = 1$ の右で無限大から始まり、 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ で最小値 $(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}$ をとった後、再び無限大へ増加する。



▶ 解法 2 (中心座標の 2 次方程式を使う)

【方針】

中心を (a, c) として楕円条件を c の 2 次方程式へ直す。判別式で存在個数を判定し、2 根の差を根と係数の関係から求めて三角形の面積を出す。

【解答】

(1) 中心が (a, c) なら、両座標軸に接する楕円は

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{c^2} = 1$$

である。点 $(1, 2)$ を代入して

$$\frac{(2-c)^2}{c^2} = 1 - \frac{(1-a)^2}{a^2} = \frac{2a-1}{a^2}$$

を得る。左辺は非負なので $2a-1 \geq 0$ が必要であり、逆にこの条件なら c を選べる。よって

$$a \geq \frac{1}{2}.$$

(2)

$$v = \frac{2a-1}{a^2}$$

とおく。中心の y 座標は

$$(1-v)c^2 - 4c + 4 = 0$$

の根である。 $a > \frac{1}{2}$ では $v > 0$ であり、 $v = 1$ は $a = 1$ のときだけである。したがって楕円がちょうど 2 つある範囲は

$$a > \frac{1}{2}, \quad a \neq 1.$$

2 根を c_1, c_2 とする。判別式は $16v$ だから

$$|c_1 - c_2| = \frac{4\sqrt{v}}{1-v}.$$

中心を結ぶ線は $x = a$ で、点 $A(1, 2)$ からこの直線までの距離は $|a-1|$ である。ゆえに

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} |a-1| |c_1 - c_2| \\ &= \frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}. \end{aligned}$$

微分すると

$$S'(a) = \begin{cases} -\frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)^2\sqrt{2a-1}}, & \frac{1}{2} < a < 1, \\ \frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)^2\sqrt{2a-1}}, & a > 1. \end{cases}$$

左の枝は 0 から無限大へ単調増加する。右の枝は

$$a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

まで減少し、その後増加する。この点での最小値は

$$(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

$a = 1$ は縦の漸近線である。

【総評】 難度 8、計算量 8。目安時間は 28~36 分。採点ポイントは、座標軸に接する楕円を $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{c^2} = 1$ と置くこと、存在条件と個数条件を $v = \frac{2a-1}{a^2}$ の値で分けること、2 つの中心の距離から面積関数を正しく作ることです。

誤りやすいのは、 $a = \frac{1}{2}$ や $a = 1$ を 2 個存在する場合に含めてしまうことです。どちらも楕円は 1 つだけなので、 $S(a)$ の定義域から外れます。また、 $|a-1|$ を外すときに左右の区間を分けないと、増減や漸近線の説明が崩れます。グラフ問題では、式だけでなく定義域、縦の漸近線、最小値、端での極限をセットで示すことが重要です。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を独立に確認する。図は条件の役割と解法の流れを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。