

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2004 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n を自然数とする.

- (1) n 個の複素数 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ をみたすならば, 不等式 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$ が成り立つことを示せ.
- (2) n 個の実数 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$ をみたすならば, 不等式 $\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$ が成り立つことを示せ.

第 2 問

素数 p, q に対して $a_n = p^n - 4(-q)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって整数 a_n を定める. ただし, $p > 2q$ とする.

- (1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば, $m = 3$ であることを示せ.
- (2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ.

第 3 問

n を 3 以上の自然数とする. 点 O を中心とする半径 1 の円において, 円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を時計回りにとる. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 直線 OP_{i-1} , OP_i とそれぞれ点 P_{i-1} , P_i で接するような放物線を C_i とする. ただし, $P_n = P_0$ とする. 放物線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ.

第 4 問

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を $\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定める.

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ.
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ.
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つような r の範囲を求めよ.

第 5 問

座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある. 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする.

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる. また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1', C_2' を, C_1' は l と y 軸に接し, C_2' は l と x 軸に接し, さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる.

(1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)