

大阪大学 2004 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 n を自然数とする.

- (1) n 個の複素数 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ をみたすならば, 不等式 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$ が成り立つことを示せ.
- (2) n 個の実数 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$ をみたすならば, 不等式 $\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$ が成り立つことを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) では $z_k = x_k + y_k i$ と置く. 偏角が第 1 象限内にあるので $x_k, y_k \geq 0$ であり, 和の絶対値の 2 乗を展開すると交差項 $x_j x_k + y_j y_k$ がすべて非負になる. (2) では $z_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$ と置くと $|z_k| = 1$ で, 実部の和が条件により 1 になる. (1) を適用して

$$n \leq \left| \sum z_k \right|^2 = 1 + \left(\sum \sin \theta_k \right)^2$$

を得る. 正弦の和は非負なので平方根を取れる.

【解答】

(1) $z_k = x_k + y_k i$ とおく. $0 \leq \arg z_k \leq \pi/2$ であるから, z_k は第 1 象限またはその境界上にあり, $x_k \geq 0, y_k \geq 0$ である.

このとき

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^2$$

である. 右辺を展開すると

$$\begin{aligned} |z_1 + \dots + z_n|^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j x_k + y_j y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j x_k + y_j y_k). \end{aligned}$$

ここで x_j, x_k, y_j, y_k はすべて 0 以上なので, 交差項はすべて 0 以上である. したがって $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$ である.

(2) $z_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$ とおく. $0 \leq \theta_k \leq \pi/2$ だから, $0 \leq \arg z_k \leq \pi/2$ であり, (1) を適用できる. また $|z_k| = 1$ である. よって (1) より

$$n = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2$$

である.

一方, 条件より

$$\sum_{k=1}^n \cos \theta_k = 1$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^n z_k = 1 + i \sum_{k=1}^n \sin \theta_k$$

である. したがって

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = 1 + \left(\sum_{k=1}^n \sin \theta_k \right)^2$$

である。ゆえに

$$n \leq 1 + \left(\sum_{k=1}^n \sin \theta_k \right)^2$$

となる。 $0 \leq \theta_k \leq \pi/2$ なので、

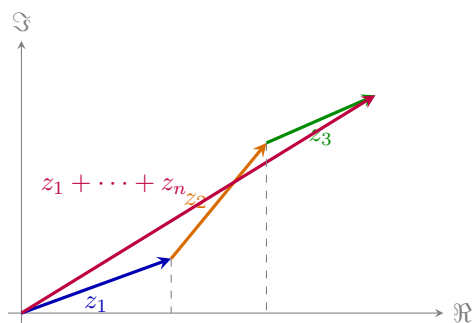
$$\sum \sin \theta_k \geq 0$$

である。よって平方根を取って

$$\sqrt{n-1} \leq \sum_{k=1}^n \sin \theta_k$$

すなわち $\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_n$ が成り立つ。

【第 1 象限のベクトル和】



▶ 解法 2

【方針】

各複素数を平面ベクトルとみなし、和の絶対値の二乗を内積で展開する。偏角差が $[-\pi/2, \pi/2]$ に入るので、異なる二つのベクトルの内積が非負になる。

【解答】

(1) 偏角を $\phi_k = \arg z_k$ とする。任意の $j < k$ に対して

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi_j - \phi_k \leq \frac{\pi}{2}$$

だから

$$\operatorname{Re}(z_j \overline{z_k}) = |z_j| |z_k| \cos(\phi_j - \phi_k) \geq 0.$$

したがって

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \operatorname{Re}(z_j \overline{z_k}) \\ &\geq \sum_{k=1}^n |z_k|^2. \end{aligned}$$

これで (1) が示された。

(2)

$$z_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$$

と置く。各 $|z_k| = 1$ であり、(1) と実部の和の条件から

$$\begin{aligned} n &\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \cos \theta_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin \theta_k \right)^2 \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^n \sin \theta_k \right)^2. \end{aligned}$$

正弦の和は非負なので

$$\sqrt{n-1} \leq \sum_{k=1}^n \sin \theta_k$$

を得る。

【総評】 難度 5、計算量 3。目安時間は 12～16 分。(1) は複素数の不等式というより、第 1 象限にあるベクトル同士の内積が非負であることを展開で示す問題である。各 z_k の実部・虚部が非負であるため、和の長さの 2 乗には非負の交差項が加わる。(2) では、 $z_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$ と置くと実部の和がちょうど 1 になる設計になっている。最後に正弦の和が非負であることを確認してから平方根を取ると、答案として隙がない。

【第 2 問】

素数 p, q に対して $a_n = p^n - 4(-q)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって整数 a_n を定める。ただし、 $p > 2q$ とする。

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば、 $m = 3$ であることを示せ。

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) では共通約数 m を取り、 $a_1 = p + 4q \equiv 0 \pmod{m}$ から $p \equiv -4q \pmod{m}$ を得る。これを $a_2 = p^2 - 4q^2$ に代入すると $12q^2 \equiv 0 \pmod{m}$ となる。 m は q と互いに素であり、さらに $p + 4q$ が奇数なので m も奇数であることから、 m は 3 だけに限られる。(2) は $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ がすべての n で成り立つ条件を $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ として整理し、 $p > 2q$ のもとで積が最小の素数を探す。

【解答】

(1) $a_1 = p - 4(-q) = p + 4q$, $a_2 = p^2 - 4q^2$ である。 $m > 1$ が a_1 と a_2 の公約数であるとする。 $m \mid a_1$ より $p + 4q \equiv 0 \pmod{m}$ であるから、 $p \equiv -4q \pmod{m}$ である。これを a_2 に用いると、 $m \mid a_2$ より $0 \equiv p^2 - 4q^2 \equiv 16q^2 - 4q^2 = 12q^2 \pmod{m}$ である。

ここで $p > 2q$ なので、 p と q は異なる素数である。したがって p は q で割れず、 $p + 4q \equiv p \not\equiv 0 \pmod{q}$ である。よって $a_1 = p + 4q$ は q と互いに素であり、その約数である m も q と互いに素である。したがって $12q^2 \equiv 0 \pmod{m}$ から $m \mid 12$ である。

また $q \geq 2$ かつ $p > 2q$ より $p > 4$ なので、 p は奇素数である。 $4q$ は偶数だから、 $p + 4q$ は奇数である。よってその約数 m も奇数である。 $m \mid 12$ かつ m が奇数で $m > 1$ だから、 $m = 3$ である。

(2)

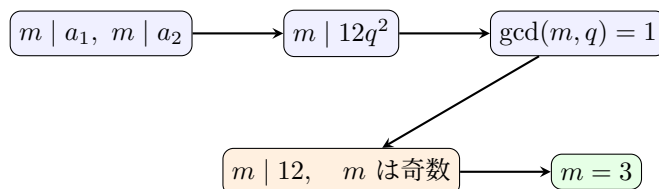
すべての a_n が 3 の倍数であるためには、特に $a_1 = p + 4q$ が 3 の倍数でなければならない。 $4 \equiv 1 \pmod{3}$ なので、これは $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ と同値である。

逆に、 $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ とする。このとき $p \equiv -q \pmod{3}$ である。また $4 \equiv 1 \pmod{3}$ だから、任意の n について $a_n = p^n - 4(-q)^n \equiv p^n - (-q)^n \equiv 0 \pmod{3}$ である。したがって、すべての a_n が 3 の倍数である条件は $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ である。

あとは $p > 2q$ を満たす素数 p, q のうち、 $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ かつ pq が最小のものを探す。積を小さくするにはまず q を小さく見る。 $q = 2$ のとき、 $p > 4$ であり、さらに $p + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ だから $p \equiv 1 \pmod{3}$ である。 $p > 4$ を満たす素数のうち、これを満たす最小のものは $p = 7$ である。

したがって求める組は $p = 7$, $q = 2$ である。このとき $pq = 14$ であり、 $q \geq 3$ なら積は少なくとも $pq > 2q^2 \geq 18$ となるので、これより小さくはない。

【公約数を 3 へ絞る流れ】



▶ 解法 2

【方針】

公約数の素因数 ℓ を一つ取って法 ℓ で考える。二つの合同式から $\ell \mid 12$ を導き、奇素数であるため $\ell = 3$ と絞る。公約数そのものが 3 を超えないことも $m \mid 12$ から確認する。

【解答】

(1) まず

$$a_1 = p + 4q, \quad a_2 = (p - 2q)(p + 2q).$$

$m > 1$ が両者を割るとする。 $p > 2q$ より p, q は異なる素数であり、

$$\gcd(m, q) = 1.$$

実際、 $q \mid m$ なら $q \mid a_1$ から $q \mid p$ となって矛盾する。

$p \equiv -4q \pmod{m}$ を a_2 へ代入すると

$$0 \equiv p^2 - 4q^2 \equiv 12q^2 \pmod{m}.$$

$\gcd(m, q) = 1$ だから $m \mid 12$ 。一方 p は奇数で $4q$ は偶数なので a_1 は奇数、したがって m も奇数である。よって $m > 1$ を合わせると

$$m = 3.$$

(2) すべての a_n が 3 の倍数であるための必要条件は

$$a_1 = p + 4q \equiv p + q \equiv 0 \pmod{3}.$$

これは十分でもある。実際 $p \equiv -q \pmod{3}$ なら任意の n で

$$a_n \equiv p^n - (-q)^n \equiv 0 \pmod{3}.$$

$q = 2$ のとき $p > 4$ かつ $p \equiv 1 \pmod{3}$ を満たす最小の素数は $p = 7$ 。このとき積は 14 である。 $q \geq 3$ なら

$$pq > 2q^2 \geq 18$$

だからこれより小さくならない。ゆえに

$$(p, q) = (7, 2).$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18～24 分。(1) は合同式の置き換えが中心で、 $p \equiv -4q \pmod{m}$ を $p^2 - 4q^2$ に代入して $12q^2$ を出す。そこから m と q が互いに素であること、 m が奇数であることを順に使って $m = 3$ まで絞る。(2) では、 a_1 の条件が実は全 n の条件にも十分であることを $p \equiv -q \pmod{3}$ で確認する。最小性の確認では、 $q = 2$ を試した後、 $q \geq 3$ では積が 14 を下回らないことを一言添えるとよい。

【第 3 問】

n を 3 以上の自然数とする. 点 O を中心とする半径 1 の円において, 円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を時計回りにとる. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 直線 OP_{i-1}, OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}, P_i で接するような放物線を C_i とする. ただし, $P_n = P_0$ とする. 放物線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

隣り合う 2 半径のなす角を 2α とし, $\alpha = \pi/n$ とする. 1 つの区画だけを考え, 角の二等分線を x 軸, 隣り合う接点を $(\cos \alpha, \pm \sin \alpha)$ に置く. 対称性から放物線は $x = Ay^2 + B$ と書ける. 接点を通る条件と, 接線が半径 OP_i と一致する条件から A, B を決める. 1 区画の面積は, 上下対称性で 2 倍し, 半径の直線と放物線の間を積分する. 最後に n 倍して極限を取る.

【解答】

$\alpha = \frac{\pi}{n}$ とおく. 隣り合う 2 つの半径のなす角は 2α である. 1 つの区画だけを考え, 角の二等分線を x 軸にとると, 2 つの接点を $(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \alpha, -\sin \alpha)$ とおける.

この 2 点でそれぞれ半径に接する放物線は, x 軸に関して対称である. したがって $x = Ay^2 + B$ と書ける. 点 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ を通るので $\cos \alpha = A \sin^2 \alpha + B$ である.

また, この点での接線は半径 OP_i と一致する. 曲線 $x = Ay^2 + B$ について $\frac{dx}{dy} = 2Ay$ だから, 接線の傾きは $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2Ay}$ である. $y = \sin \alpha$ で接線の傾きは $\tan \alpha$ なので, $\frac{1}{2A \sin \alpha} = \tan \alpha$ である. よって $A = \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$ であり, 先ほどの通過条件から $B = \frac{\cos \alpha}{2}$ である. したがって放物線は $x = \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} y^2 + \frac{\cos \alpha}{2}$ である.

この 1 区画の面積を求める. 上半分 $0 \leq y \leq \sin \alpha$ では, 半径の直線は $x = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y$ である. 放物線はこの直線より右側にあるので, 1 区画の面積は上下対称性により

$$2 \int_0^{\sin \alpha} \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} y^2 + \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y \right) dy$$

である. 計算すると

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{\cos \alpha}{6 \sin^2 \alpha} y^3 + \frac{\cos \alpha}{2} y - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} y^2 \right]_0^{\sin \alpha} \\ &= 2 \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{3}. \end{aligned}$$

同じ面積の区画が n 個あるので,

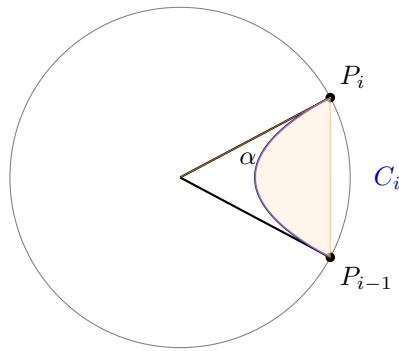
$$S_n = n \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{3} = \frac{n}{6} \sin 2\alpha = \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n}$$

である. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$$

である.

【一つの区画と放物線】



▶ 解法 2

【方針】

一つの扇形を角の二等分線に沿って座標化し、縦座標を $\sin \alpha$ で規格化する。放物線と半径の差が完全平方になることを使い、積分を即座に計算する。

【解答】

$\alpha = \frac{\pi}{n}$ とする。一つの区画で角の二等分線を x 軸にとると、放物線は

$$x = \frac{\cos \alpha}{2} \left(1 + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} \right)$$

であり、上側の半径は

$$x = y \cot \alpha$$

である。ここで $v = y / \sin \alpha$ と置けば、両者の差は

$$\begin{aligned} x_{\text{parabola}} - x_{\text{radius}} &= \frac{\cos \alpha}{2} (1 + v^2) - v \cos \alpha \\ &= \frac{\cos \alpha}{2} (1 - v)^2. \end{aligned}$$

したがって上下を合わせた一区画の面積は

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_0^{\sin \alpha} (x_{\text{parabola}} - x_{\text{radius}}) dy \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \int_0^1 (1 - v)^2 dv \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{3}. \end{aligned}$$

回転対称な区画が n 個あるので

$$S_n = \frac{n}{3} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{3}$$

である。差が完全平方になるため、被積分関数が常に非負であることも同時に確認できる。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30～38 分。回転対称性により 1 区画だけを座標化するのが第一歩である。放物線は接点を通るだけでなく、その点で半径に接するので、接線の傾き条件まで使って係数を決める。面積計算では、放物線と 2 本の半径で囲まれる部分を積分するため、上半分では半径の直線 $x = y \cot \alpha$ と放物線の差を取る。単に放物線の下面積を積分すると別の領域になるので注意したい。最後は $n \sin(2\pi/n) \rightarrow 2\pi$ を使えばよい。

【第 4 問】

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を $\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定める.

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ.
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ.
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$ が成り立つような r の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = rx(1-x)$ と置く。(1) は初期値 a が固定値であればよいので $f(a) = a$ を解く。(2) は $x_2 \neq a, x_3 = a$ だから、 $f(f(a)) = a$ の解から固定値 $f(a) = a$ を除く。因数分解すると固定値に対応する因子と 2 周期に対応する 2 次因子に分かれるので、その 2 次方程式の実数解の個数を判別式で調べる。端点 $r = -1, 3$ の重解は固定値に一致するため除く。(3) は写像 f が区間 $[0, 1]$ を $[0, 1]$ に移す条件を求める。

【解答】

(1)

すべての n について $x_n = a$ となるためには、最初の 1 回で $x_2 = ra(1-a) = a$ となればよい。したがって $a\{r(1-a)-1\} = 0$ である。よって $a = 0$ または、 $r \neq 0$ のとき $a = 1 - \frac{1}{r}$ である。

(2) $f(x) = rx(1-x)$ とおく。条件 $x_3 = a$ は $f(f(a)) = a$ であり、さらに $x_2 \neq a$ は $f(a) \neq a$ であることを意味する。

計算すると $f(f(a)) - a = -a(ar - r + 1)(a^2r^2 - ar^2 - ar + r + 1)$ と因数分解される。ここで $a = 0, ar - r + 1 = 0$ は (1) で求めた固定値に対応する。したがって $x_2 \neq a$ を満たす解は $a^2r^2 - ar^2 - ar + r + 1 = 0$ の実数解で、固定値と重ならないものに限られる。 $r = 0$ のとき、この式は $1 = 0$ となり解はない。 $r \neq 0$ のとき、この 2 次方程式の判別式は $(-r^2 - r)^2 - 4r^2(r + 1) = r^2(r + 1)(r - 3)$ である。したがって、 $r < -1$ または $r > 3$ のときは異なる 2 つの実数解をもつ。 $r = -1$ のときは重解 $a = 0$ で、これは固定値である。 $r = 3$ のときは重解 $a = 2/3$ で、これも固定値である。 $-1 < r < 3$ では判別式が負で解はない。以上より、求める個数は

$$\begin{cases} 2 & (r < -1 \text{ または } 3 < r), \\ 0 & (-1 \leq r \leq 3) \end{cases}$$

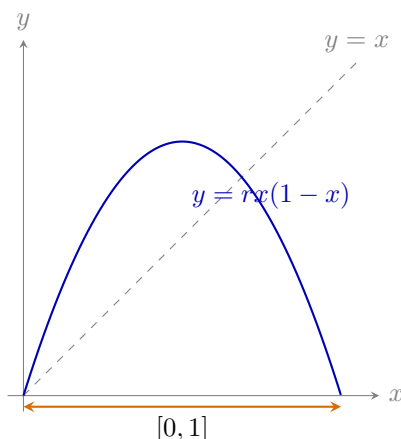
である。

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ である。すべての $0 \leq a \leq 1$ について $x_2 = ra(1-a)$ が $[0, 1]$ に入るためには、まず $r \geq 0$ が必要である。また $a = 1/2$ とすると $a(1-a) = 1/4$ なので、 $\frac{r}{4} \leq 1$ すなわち $r \leq 4$ も必要である。

逆に $0 \leq r \leq 4$ なら、任意の $0 \leq x \leq 1$ に対して $0 \leq rx(1-x) \leq \frac{r}{4} \leq 1$ である。つまり f は区間 $[0, 1]$ を再び $[0, 1]$ に移す。したがって、 $0 \leq a \leq 1$ なら帰納的に $0 \leq x_n \leq 1 \quad (n \geq 2)$ が成り立つ。

よって求める r の範囲は $0 \leq r \leq 4$ である。

【写像 $f(x) = rx(1-x)$ 】



▶ 解法 2

【方針】

$f(f(a)) - a$ を「固定点の因子」と「真の 2 周期点の因子」に分ける。後者の二次方程式の解を明示し、実数性と固定点との一致を端点で確認する。

【解答】

(1) 固定点は

$$f(a) = a \iff a\{r(1-a) - 1\} = 0$$

より

$$a = 0, \quad a = 1 - \frac{1}{r} \quad (r \neq 0)$$

である。

(2) 二回で戻る点については

$$f(f(a)) - a = -a(ar - r + 1)\{a^2r^2 - a(r^2 + r) + r + 1\}.$$

前二因子は固定点であるから、真の 2 周期点は

$$a^2r^2 - a(r^2 + r) + r + 1 = 0$$

の解である。 $r \neq 0$ のとき解は

$$a = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}.$$

よって異なる実数解が二つあるのは

$$r < -1 \quad \text{または} \quad r > 3.$$

$r = -1$ では重解 $a = 0$, $r = 3$ では重解 $a = 2/3$ となり、いずれも固定点なので除く。したがって個数は

$$\begin{cases} 2 & (r < -1 \text{ または } r > 3), \\ 0 & (-1 \leq r \leq 3). \end{cases}$$

(3) 最後に、すべての $a \in [0, 1]$ から始めて以後も区間内にとどまる条件は

$$f([0, 1]) \subset [0, 1].$$

$0 \leq x(1-x) \leq 1/4$ より、これは

$$0 \leq r \leq 4$$

と同値である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 24~30 分。写像 $f(x) = rx(1-x)$ の固定値、2 回で戻る値、不変区間を順に調べる問題である。(2) では $f(f(a)) = a$ の解には固定値も含まれるため、条件 $x_2 \neq a$ によって固定値を除く必要がある。判別式の端点 $r = -1, 3$ では重解が出るが、どちらも固定値に一致するため個数は 0 になる。(3) は $[0, 1]$ 上で $x(1-x)$ の最大が $1/4$ であることから、 $0 \leq r \leq 4$ が必要十分になる。

【第 5 問】

座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある. 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする.

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる. また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1', C_2' を, C_1' は l と y 軸に接し, C_2' は l と x 軸に接し, さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる.

(1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$s = \sin \theta, c = \cos \theta$ と置く. 各円の中心は, 軸に接する条件から $(R, y_1), (x_2, R)$ または $(r, y_1'), (x_2', r)$ と書ける. 直線 l までの距離が半径に等しい条件で中心座標を半径の式にし, 2 円が外接する条件で R, r を決める. 計算を簡単にするため $u = \tan(\theta/2)$ と置き, 半角公式で整理する. 半径比 $F(u) = r/R$ を得たら, $0 < u < 1$ で微分して最大値を求める.

【解答】

(1) $s = \sin \theta, c = \cos \theta$ とおく. $0 < \theta < \pi/2$ より $s > 0, c > 0$ である.

まず領域 D 内の 2 つの円を考える. C_1 は y 軸に接する半径 R の円なので, その中心を (R, y_1) とおく. C_1 は直線 $l: sx + cy = 1$ にも接し, 領域 D 側にあるから, 中心から直線までの距離が R であることは $sR + cy_1 - 1 = R$ と表せる. したがって $y_1 = \frac{1 + R(1-s)}{c}$ である. 同様に, C_2 の中心を (x_2, R) とおくと $sx_2 + cR - 1 = R$ より $x_2 = \frac{1 + R(1-c)}{s}$ である. さらに C_1, C_2 は外接するので $(x_2 - R)^2 + (R - y_1)^2 = 4R^2$ である.

次に領域 D' 内の 2 つの円を考える. 今度は直線の反対側にあるので, 中心と直線の距離条件は符号が反対になる. C_1' の中心を (r, y_1') , C_2' の中心を (x_2', r) とすると, $y_1' = \frac{1 - r(1+s)}{c}$, $x_2' = \frac{1 - r(1+c)}{s}$ であり, 外接条件は $(x_2' - r)^2 + (r - y_1')^2 = 4r^2$ である.

ここで $u = \tan \frac{\theta}{2}$ とおく. $0 < \theta < \pi/2$ だから $0 < u < 1$ であり, 半角公式より $s = \frac{2u}{1+u^2}$, $c = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ である. これを上 の 2 つの外接条件に代入して整理する. D 側については正の半径を選ぶと $R = \frac{(1+u^2)^2}{2u(1-u)(u^2+2u+3)}$ である. D' 側についても, 領域内にある正の半径を選ぶと $r = \frac{(1+u^2)^2}{2(1+u)(1+2u-u^2)}$ である. したがって $\frac{r}{R} = \frac{u(1-u)(u^2+2u+3)}{(1+u)(1+2u-u^2)}$ である. すなわち

$$\frac{r}{R} = \frac{u(1-u)(u^2+2u+3)}{(1+u)(1+2u-u^2)}, \quad u = \tan \frac{\theta}{2}$$

である.

(2) $F(u) = \frac{u(1-u)(u^2+2u+3)}{(1+u)(1+2u-u^2)}$ とおく. $0 < u < 1$ では $1+u > 0$, $1+2u-u^2 > 0$ であるから, 分母は正である.

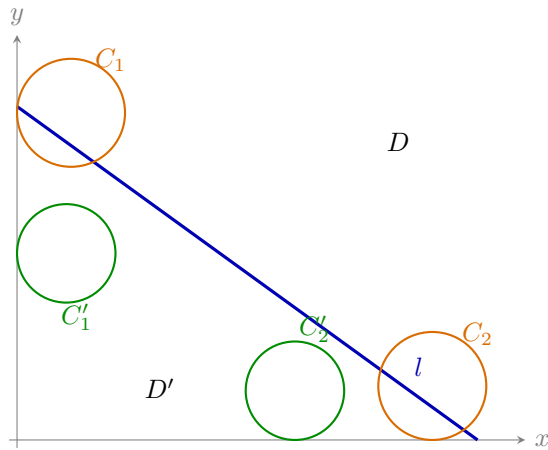
微分して整理すると $F'(u) = \frac{(1+u^2)(u^2-4u-3)(u^2+2u-1)}{(1+u)^2(1+2u-u^2)^2}$ である. $0 < u < 1$ では $1+u^2 > 0$, $u^2-4u-3 < 0$ であり, 分母も正である. したがって増減を決めるのは u^2+2u-1 の符号である. $u^2+2u-1=0$ の $0 < u < 1$ にある解は $u = \sqrt{2}-1$ である. よって $F(u)$ は $0 < u < \sqrt{2}-1$ で増加し, $\sqrt{2}-1 < u < 1$ で減少する. したがって最大値は $u = \sqrt{2}-1$ で生じる.

このとき計算すると $F(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ である. また

$$\lim_{u \rightarrow 0+} F(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 1-} F(u) = 0$$

であり, 端点 $u = 0, 1$ は $0 < \theta < \pi/2$ に含まれない. したがって r/R の取り得る値の範囲は $0 < \frac{r}{R} \leq \sqrt{2}-1$ である.

【二つの領域の接円配置】



► 解法 2

【方針】

中心から直線までの符号付き距離を使って二円の中心を半径の一次式で表す。外接条件を半角変数 $u = \tan(\theta/2)$ で有理化し、物理的に第 1 象限内にある根だけを選ぶ。最後に対数微分ではなく因数分解済みの導関数で増減を決める。

【解答】

(1) $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ とする。領域 D の二円の中心を

$$A = (R, y_1), \quad B = (x_2, R)$$

と置く。符号付き距離から

$$y_1 = \frac{1 + R(1 - s)}{c}, \quad x_2 = \frac{1 + R(1 - c)}{s}.$$

領域 D' では

$$\begin{aligned} A' &= (r, y'_1), & B' &= (x'_2, r), \\ y'_1 &= \frac{1 - r(1 + s)}{c}, & x'_2 &= \frac{1 - r(1 + c)}{s}. \end{aligned}$$

それぞれの外接条件は

$$|A - B| = 2R, \quad |A' - B'| = 2r.$$

【半角変数による整理】

$$u = \tan \frac{\theta}{2}, \quad s = \frac{2u}{1+u^2}, \quad c = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad 0 < u < 1$$

を代入して因数分解すると、正でかつ各中心が第 1 象限内にある根は

$$R = \frac{(1+u^2)^2}{2u(1-u)(u^2+2u+3)}, \quad r = \frac{(1+u^2)^2}{2(1+u)(1+2u-u^2)}.$$

したがって

$$F(u) = \frac{r}{R} = \frac{u(1-u)(u^2+2u+3)}{(1+u)(1+2u-u^2)}.$$

なお外接方程式のもう一つの正根では $y'_1 < 0$ または $x'_2 < 0$ となるため、領域 D' の円ではない。

(2) 微分すると

$$F'(u) = \frac{(1+u^2)(u^2-4u-3)(u^2+2u-1)}{(1+u)^2(1+2u-u^2)^2}.$$

$0 < u < 1$ では $u^2 - 4u - 3 < 0$ だから、 F は

$$u_0 = \sqrt{2} - 1$$

まで増加し、その後減少する。さらに

$$F(u_0) = \sqrt{2} - 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0+} F(u) = \lim_{u \rightarrow 1-} F(u) = 0.$$

よって

$$0 < \frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1.$$

【総評】 難度 8、計算量 8。目安時間は 35～45 分。接円条件をすべて座標と距離で書き下す計算問題である。円がどちらの領域にあるかで、直線までの距離条件の符号が変わる点が最初の注意点になる。中心座標を半径で表した後、2 円の外接条件に代入すると式がかなり重くなるため、半角置換 $u = \tan(\theta/2)$ で $\sin \theta, \cos \theta$ を有理式にするのが有効である。(2) は分母が正であることを確認してから微分の符号を読む。最大は $u = \sqrt{2} - 1$ 、すなわち中間の角で達成され、両端では比が 0 に近づく。