

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2007 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

自然数 r と負でない整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ が次の 4 条件を満たすとする。

$$r \geq 3, \quad \sum_{k=1}^r k a_k = 24, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_r \geq 20, \quad a_r > 0.$$

- (1) $a_2 + 2a_3 + \dots + (r-1)a_r \leq 4$ を示せ。
- (2) $r \leq 5$ を示せ。
- (3) 条件を満たす r と、そのときの $a_1, a_2, \dots, a_r$ の組を全て求めよ。

注：原問題 (1) の末項 $(r+1)a_r$ は、条件式および後続小問に合わせて $(r-1)a_r$ と訂正して掲載した。

第 2 問

関数 $y = \log x$ と $y = \frac{a}{x^2}$ を考える。ただし対数は自然対数とし、 $a > 0$ とする。

- (1) 2 曲線の交点の x 座標を p で表すとき、 a を p を用いて表せ。
- (2) $y = \log x$, $y = a/x^2$, $x = 1$, $x = 2$ で囲まれる部分の面積 S を p を用いて表せ。
- (3) a を動かすとき、 S の最小値を求めよ。

第 3 問

空間に 8 点 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$ をとる。

- (1) 四面体 $ACFH$ を平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切断したとき, 切断面の面積を t で表せ。
- (2) 四面体 $ACFH$ と四面体 $BDEG$ の重なり合う部分の体積を求めよ。

第 4 問

媒介変数 t ($t > 0$) を用いて $x = f(t), y = g(t)$ と表される曲線を C とする。ここで

$$f(t) = a \frac{t - t^{-1}}{2}, \quad g(t) = b \frac{t + t^{-1}}{2}$$

であり, a, b は正の定数である。

- (1) $\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{b^2 f(t)}{a^2 g(t)}$ を示せ。
- (2) 点 $P(u, v)$ を通る C の接線が 2 本引ける $P(u, v)$ の領域を図示せよ。
- (3) 点 $P(u, v)$ を通る 2 本の接線が直交する場合を考える。このような $P(u, v)$ が存在するための a, b の条件, およびそのときの $P(u, v)$ の軌跡を図示せよ。

注：原問題 (1) の左辺の分子 dy/dx は, 媒介変数表示の接線勾配を表す dy/dt と訂正して掲載した。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)