大阪大学 2007 年度 理系（後期）

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 r と負でない整数 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ が次の 4 条件を満たすとする。

$$r \geqq 3, \qquad \sum_{k=1}^{r} ka_k = 24, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_r \geqq 20, \qquad a_r > 0.$$

(1) $a_2 + 2a_3 + \cdots + (r-1)a_r \leqq 4$ を示せ。
(2) $r \leqq 5$ を示せ。
(3) 条件を満たす r と，そのときの $a_1, a_2, \ldots, a_r$ の組を全て求めよ。

注：原問題 *(1)* の末項 $(r+1)a_r$ は，条件式および後続小問に合わせて $(r-1)a_r$ と訂正して掲載した。

【方針】

(1) は重み付き和から通常の和を引く。(2) は得られた非負整数の和のうち最後の項だけを残す。(3) は $3 \leqq r \leqq 5$ の各場合に，(1) で得た重み付き和の上限と $a_r > 0$ を使って末尾から列挙し，最後に a_1 を元の等式で決める。

【解答】

(1) 与えられた等式と不等式から

$$\begin{aligned} a_2 + 2a_3 + \cdots + (r-1)a_r &= \sum_{k=1}^{r} ka_k - \sum_{k=1}^{r} a_k \\ &\leqq 24 - 20 = 4. \end{aligned}$$

(2) 全ての a_k は負でなく，$a_r > 0$ は整数だから $a_r \geqq 1$ である。(1) の左辺の最後の項に注目すると

$$r - 1 \leqq (r-1)a_r \leqq 4.$$

よって $r \leqq 5$ である。

(3) (1)(2) より $r = 3, 4, 5$ を調べればよい。

$r = 5$ のとき，

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 \leqq 4, \qquad a_5 \geqq 1$$

だから $a_5 = 1$，$a_2 = a_3 = a_4 = 0$ である。元の等式から $a_1 = 19$ となる。

$r = 4$ のとき，$a_4 \geqq 1$ と

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 \leqq 4$$

より $a_4 = 1$，$a_3 = 0$，$a_2 = 0$ または 1 である。元の等式から

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (20, 0, 0, 1),\ (18, 1, 0, 1)$$

を得る。

$r = 3$ のとき

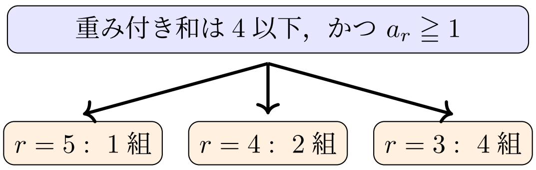
$$a_2 + 2a_3 \leqq 4, \qquad a_3 \geqq 1$$

である。$a_3 = 1$ なら $a_2 = 0, 1, 2$，$a_3 = 2$ なら $a_2 = 0$ である。したがって

$$(a_1, a_2, a_3) = (21, 0, 1),\ (19, 1, 1),\ (17, 2, 1),\ (18, 0, 2)$$

である。

以上の 7 組はいずれも元の 4 条件を満たすので，これらが全てである。



末尾の重みが大きい $r=5$ から調べると漏れない。

【総評】 難度 5，計算量 5。想定時間は 20 分程度。重み付き和と項数の和の差が 4 以下になることが全小問を支配する。a_r が正の整数であるため r が 5 以下に絞れ，その後は $r=5,4,3$ の順に末尾係数を列挙すると漏れがない。最後に各候補を元の等式へ戻す。

【第 2 問】

関数 $y=\log x$ と $y=\dfrac{a}{x^2}$ を考える。ただし対数は自然対数とし，$a>0$ とする。

(1) 2 曲線の交点の x 座標を p で表すとき，a を p を用いて表せ。
(2) $y=\log x$，$y=a/x^2$，$x=1$，$x=2$ で囲まれる部分の面積 S を p を用いて表せ。
(3) a を動かすとき，S の最小値を求めよ。

【方針】
(1) は交点条件をそのまま a について解く。(2) では $x^2\log x$ が $x>1$ で増加することから，2 曲線の上下は $x=p$ で入れ替わる。$p<2$ と $p\geqq 2$ に分けて絶対値付きの面積を積分する。(3) は各範囲の式を微分する。

【解答】
(1) 交点では

$$\log p=\frac{a}{p^2}$$

だから

$$a=p^2\log p.$$

$a>0$ より $p>1$ である。また $x^2\log x$ は $x>1$ で単調に増加するため，この交点は一意である。

(2)

$$G(x)=x\log x-x+\frac{a}{x}$$

とおくと

$$G'(x)=\log x-\frac{a}{x^2}$$

である。

まず $1<p<2$ のとき，$1\leqq x<p$ では $a/x^2>\log x$，$p<x\leqq 2$ では逆になる。したがって

$$S=G(1)+G(2)-2G(p).$$

ここで $a=p^2\log p$ より

$$G(1)=-1+a,\qquad G(2)=2\log 2-2+\frac{a}{2},\qquad G(p)=2p\log p-p.$$

よって

$$S=2\log 2-3+\frac{3}{2}p^2\log p-4p\log p+2p\qquad (1<p<2).$$

次に $p\geqq 2$ のとき，区間 $[1,2]$ では常に $a/x^2\geqq\log x$ だから

$$S=G(1)-G(2)=1-2\log 2+\frac{1}{2}p^2\log p\qquad (p\geqq 2).$$

(3) $1<p<2$ における式を微分すると

$$S'(p)=(3p-4)\left(\log p+\frac{1}{2}\right).$$

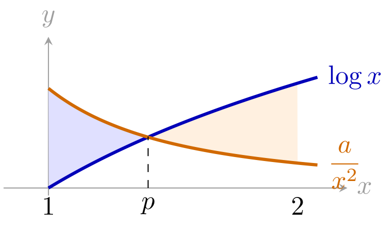
Evolton evolton.jp

この範囲では $\log p + 1/2 > 0$ なので，S は $1 < p < 4/3$ で減少し，$4/3 < p < 2$ で増加する。一方 $p \geqq 2$ では

$$S'(p) = p\log p + \frac{p}{2} > 0$$

である。したがって全体の最小は $p = 4/3$ のときである。その値は

$$S_{\min} = 2\log 2 - \frac{8}{3}\log\frac{4}{3} - \frac{1}{3}.$$



$1 < p < 2$ では $x = p$ で上下が入れ替わる。$p \geqq 2$ は別の場合である。

【総評】 難度 6，計算量 6。想定時間は 25 分程度。交点 p が区間 $[1, 2]$ の内側か右側かで面積の式が変わるため，場合分けを省けない。差の原始関数を G と置くと符号反転を簡潔に処理できる。最小点 $p = 4/3$ は前半の範囲にあり，後半は単調増加である。

【第 3 問】

空間に 8 点 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,1)$，$F(1,0,1)$，$G(1,1,1)$，$H(0,1,1)$ をとる。

(1) 四面体 $ACFH$ を平面 $z = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切断したとき，切断面の面積を t で表せ。

(2) 四面体 $ACFH$ と四面体 $BDEG$ の重なり合う部分の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は四面体内の点を 4 頂点の非負係数による表示にし，$z = t$ を固定する。2 つの独立な係数が長方形を動き，(x, y) への変換で面積が 2 倍になる。(2) では両四面体の水平断面を $u = x + y, v = x - y$ で表すと，重なりが長方形になり，その面積を高さで積分できる。

【解答】

(1) 四面体 $ACFH$ 内の点は，非負の実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を用いて

$$\alpha A + \beta C + \gamma F + \delta H, \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

と表せる。その座標は

$$(x, y, z) = (\beta + \gamma,\ \beta + \delta,\ \gamma + \delta)$$

である。

$z = t$ とすると $\gamma + \delta = t$，$\alpha + \beta = 1 - t$ だから

$$0 \leqq \beta \leqq 1 - t, \qquad 0 \leqq \gamma \leqq t, \qquad \delta = t - \gamma.$$

したがって

$$(x, y) = (\beta + \gamma,\ \beta + t - \gamma).$$

(β, γ) 平面の長方形の面積は $t(1 - t)$ であり，辺方向 $(1, 1), (1, -1)$ が作る平行四辺形の面積倍率は 2 である。よって切断面積は

$$2t(1 - t).$$

(2) (1) の係数を逆に解くと，四面体 $ACFH$ の高さ $z = t$ の断面は

$$|x - y| \leqq t, \qquad t \leqq x + y \leqq 2 - t$$

Evolton evolton.jp

で表される。

四面体 $BDEG$ は，立方体の中心に関して $ACFH$ を点対称に移したものである。したがって高さ t の断面は

$$|x-y| \leqq 1-t, \qquad 1-t \leqq x+y \leqq 1+t$$

で表される。

$h=\min(t, 1-t)$ とおくと，両断面の重なりは

$$|x-y| \leqq h, \qquad 1-h \leqq x+y \leqq 1+h$$

である。ここで $u=x+y, v=x-y$ とおくと，uv 平面では縦横とも長さ $2h$ の長方形になる。また $dx\,dy=\dfrac{1}{2}du\,dv$ だから，重なりの断面積は

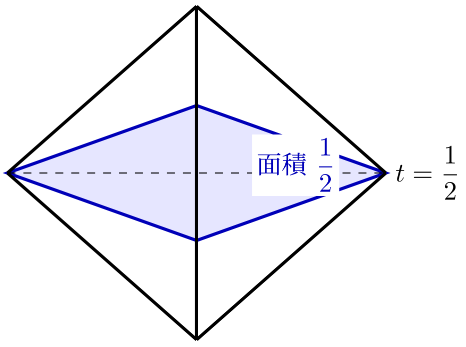
$$2h^2 = 2\min(t, 1-t)^2$$

である。

よって求める体積は対称性を用いて

$$2\int_0^{1/2} 2t^2\,dt = 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{6}$$

である。



共通部分は，高さ 1/2 の正方形を底面とする 2 個の四角錐である。

▶ 解法 2

【方針】

共通部分の水平断面を図形として追う。高さ 1/2 で最大の正方形となり，上下の端では 1 点に縮むので，共通部分を合同な 2 個の四角錐として体積計算する。

【解答】

(1) 高さ $z=t$ の平面は辺 AF, AH, CF, CH とそれぞれ

$$(t,0,t), \quad (0,t,t), \quad (1,1-t,t), \quad (1-t,1,t)$$

で交わる。これらは平行四辺形を作る。隣り合う 2 辺を xy 平面へ射影したベクトルは

$$(-t,t), \qquad (1-t,1-t)$$

だから，切断面積は行列式の絶対値より

$$\left|\begin{vmatrix} -t & 1-t \\ t & 1-t \end{vmatrix}\right| = 2t(1-t).$$

(2) 2 つの四面体の共通部分は $z=1/2$ に関して対称である。この高さでは，共通断面の頂点は

$$\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right),\ \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

である。これは 2 本の対角線がともに 1 の正方形だから，面積は 1/2 である。

一方，$z=0$ と $z=1$ では共通断面はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\qquad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

の 1 点になる。各水平断面はこの正方形と相似に変化するため，共通部分は，底面積 1/2，高さ 1/2 の合同な四角錐 2 個からなる。したがって体積は

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

【総評】 難度 7，計算量 6。想定時間は 28 分程度。(1) の切断面は平行四辺形で，係数長方形から面積を求めると座標計算が短い。(2) は 2 つの断面を $x+y, x-y$ の範囲として表すと，重なりが正方形になる。高さ 1/2 に関する対称性から積分区間を半分にできる。

【第 4 問】

媒介変数 t $(t>0)$ を用いて $x=f(t), y=g(t)$ と表される曲線を C とする。ここで

$$f(t)=a\frac{t-t^{-1}}{2},\qquad g(t)=b\frac{t+t^{-1}}{2}$$

であり，a,b は正の定数である。

(1) $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{f(t)}{g(t)}$ を示せ。

(2) 点 $P(u,v)$ を通る C の接線が 2 本引ける $P(u,v)$ の領域を図示せよ。

(3) 点 $P(u,v)$ を通る 2 本の接線が直交する場合を考える。このような $P(u,v)$ が存在するための a,b の条件，およびそのときの $P(u,v)$ の軌跡を図示せよ。

注：原問題 *(1)* の左辺の分子 dy/dx は，媒介変数表示の接線勾配を表す dy/dt と訂正して掲載した。

【方針】

(1) は f,g を直接微分する。(2) は C が上側の双曲線 $y^2/b^2-x^2/a^2=1$ であることを使い，媒介変数 t の接線が P を通る条件を t の二次方程式にする。異なる 2 正根をもつ条件を判別式・和・積で表す。(3) は 2 根に対応する傾きの積を，根と係数の関係で u,v の式へ直す。

【解答】

(1)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{2}(1+t^{-2}),\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{b}{2}(1-t^{-2})$$

だから

$$\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{b}{a}\frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

一方

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{a}{b}\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

なので，主張された等式が成り立つ。

(2) $f(t),g(t)$ は

$$\frac{g(t)^2}{b^2}-\frac{f(t)^2}{a^2}=1,\qquad g(t)>0$$

を満たす。したがって C は双曲線の上側の枝である。t に対応する点での接線は

$$-\frac{f(t)}{a^2}x+\frac{g(t)}{b^2}y=1$$

である。これが $P(u,v)$ を通る条件を整理すると

$$\left(\frac{v}{b}-\frac{u}{a}\right)t^2-2t+\left(\frac{v}{b}+\frac{u}{a}\right)=0$$

となる。

Evolton evolton.jp

この二次方程式が異なる 2 正根をもつための必要十分条件は

$$\frac{v}{b}-\frac{u}{a}>0,\qquad \frac{v}{b}+\frac{u}{a}>0,\qquad 1-\left\{\left(\frac{v}{b}\right)^2-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right\}>0$$

である。よって求める領域は

$$\frac{b}{a}|u|<v<b\sqrt{1+\frac{u^2}{a^2}}.$$

すなわち，2 本の漸近線 $v=\pm(b/a)u$ の上側にあり，双曲線 C より下側にある開領域である。境界は含まない。

(3) 2 本の接線に対応する正根を t_1, t_2，その傾きを m_1, m_2 とする。(1) より

$$m_i=\frac{b}{a}\frac{t_i^2-1}{t_i^2+1}.$$

また (2) の二次方程式の根と係数の関係を用いて整理すると

$$m_1m_2=\frac{v^2-b^2}{u^2+a^2}.$$

2 接線が直交する条件は $m_1m_2=-1$ だから

$$u^2+v^2=b^2-a^2.$$

この円が (2) の領域内に点をもつための必要十分条件は

$$b>a$$

である。実際，$b>a$ なら $u=0, v=\sqrt{b^2-a^2}$ は (2) の不等式を満たす。逆に円の右辺が正でなければ点は存在しない。したがって条件は $b>a$ であり，軌跡は円

$$u^2+v^2=b^2-a^2$$

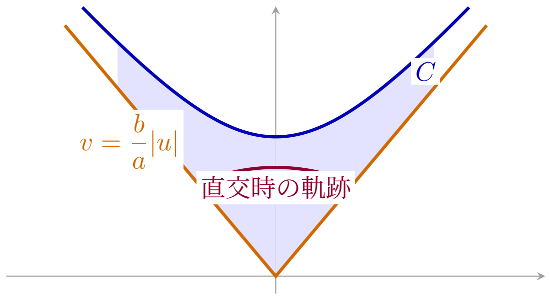
のうち

$$v>\frac{b}{a}|u|$$

を満たす上側の弧である。端点は含まれず，その座標は

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}},\, b\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}}\right)$$

である。



青い開領域で接線が 2 本引ける。$b>a$ のとき，紫の円弧だけが残る。

【総評】　難度 9，計算量 8。想定時間は 35 分程度。曲線を双曲線と見抜くだけでなく，接点の媒介変数を未知数とする二次方程式へ落とすことが核心である。2 接線は「異なる 2 正根」，直交は「傾きの積が -1」に対応する。最後の軌跡では円全体ではなく，2 接線が存在する上側の開弧だけを取る。