

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2009 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

r, s, α, β を実数とする. ただし $\alpha \neq \beta$ とする. $a_1 = \alpha$, $b_1 = \beta$ として, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定める.

(1) $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n - b_n \rightarrow 0$ となるための r, s の満たすべき条件を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ となるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

第 2 問

- (1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.
- (2) a, b を有理数とする. 多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $f(1 + \sqrt{3}) = 0$ を満たすとき, a, b を求めよ.
- (3) n を 2 以上の自然数とする. $g(x)$ は有理数を係数とする n 次多項式で最高次の係数が 1 であるとする. $g(1 + \sqrt{3}) = 0$ となるとき, $g(1 - \sqrt{3}) = 0$ を示せ.

第 3 問

O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(-2, -2, 0)$, $B(6, -2, 0)$, $C(-2, 4, 0)$ をとり, 球 $S: x^2 + y^2 + (z - 4)^2 \leq 4$ を考える.

- (1) 三角形 ABC の周または内部の点を P とする. このとき, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ となる 0 以上の 3 つの実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ と表されることを示せ.
- (2) 点 P が三角形 ABC の周および内部を, 点 Q は球 S の表面および内部を動くとき, 線分 PQ の中点 M が動いてできる立体を V とする. 3 点 A', B', C' に対して, 大きさ 1 以下のベクトル $\vec{r}$ と $\alpha + \beta + \gamma = 1$ となる 0 以上の 3 つの実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{OR} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'} + \gamma\overrightarrow{OC'} + \vec{r}$ と表される点 R 全体のなす集合を W とする. V と W が一致するような 3 点 A', B', C' を求めよ.
- (3) 立体 V の体積を求めよ.

第 4 問

a, b, c を実数とする. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x^3$ とおく. 2つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフが異なる 2 点 P, Q を共有している. さらに点 P での 2 つのグラフの接線が一致し, 点 Q での 2 つのグラフの接線は直交しているとする. これらの条件を満たすように a, b, c を変化させるとき, 2 つのグラフで囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)