

大阪大学 2009 年度 理系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

r, s, α, β を実数とする. ただし $\alpha \neq \beta$ とする. $a_1 = \alpha$, $b_1 = \beta$ として, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定める.

(1) $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n - b_n \rightarrow 0$ となるための r, s の満たすべき条件を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ となるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

2 つの漸化式を引き, 差 $d_n = a_n - b_n$ が公比 $1 - r - s$ の等比数列になることを使う. 初期差は 0 でないため, 極限 0 の必要十分条件は公比の絶対値が 1 未満であること. (2) では $sa_n + rb_n$ が不変であることを直接確かめ, $b_n = a_n - d_n$ と合わせて a_n を不変量と d_n で表す.

【解答】

(1) 2 つの漸化式を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= (1-r)a_n + rb_n - sa_n - (1-s)b_n \\ &= (1-r-s)(a_n - b_n). \end{aligned}$$

したがって

$$a_n - b_n = (1-r-s)^{n-1}(\alpha - \beta).$$

$\alpha \neq \beta$ だから, この式が 0 に収束するための必要十分条件は

$$|1-r-s| < 1$$

である. よって求める条件は

$$0 < r+s < 2$$

である.

(2) (1) の条件のもとでは $r+s \neq 0$ である. また

$$\begin{aligned} sa_{n+1} + rb_{n+1} &= s\{(1-r)a_n + rb_n\} + r\{sa_n + (1-s)b_n\} \\ &= sa_n + rb_n. \end{aligned}$$

したがって

$$sa_n + rb_n = s\alpha + r\beta$$

は n によらず一定である. $d_n = a_n - b_n$ とおくと $b_n = a_n - d_n$ だから

$$(r+s)a_n - rd_n = s\alpha + r\beta.$$

よって

$$a_n = \frac{s\alpha + r\beta + rd_n}{r+s}.$$

(1) より $d_n \rightarrow 0$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{s\alpha + r\beta}{r+s}.$$

▶ 解法 2

【方針】

漸化式の行列の 2 つの固有方向 $(1, 1)$ と $(r, -s)$ を使い, 初期ベクトルをその和に分解する. 各成分の一般項を直接書けば, 差の収束条件と共通極限が同時に読める.

【解答】

(1)

漸化式の行列を

$$M = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix}$$

とおく.

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix} = (1-r-s) \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix}$$

である.

$a_n - b_n \rightarrow 0$ なら, 後で得る条件から $r+s \neq 0$ である. 初期ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{s\alpha + r\beta}{r+s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha - \beta}{r+s} \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix}$$

と分解できる. したがって

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{s\alpha + r\beta}{r+s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha - \beta}{r+s} (1-r-s)^{n-1} \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix}.$$

特に

$$a_n - b_n = (\alpha - \beta)(1-r-s)^{n-1}$$

である. $\alpha \neq \beta$ だから, これが 0 に収束するための必要十分条件は

$$|1-r-s| < 1$$

すなわち

$$0 < r+s < 2$$

である.

(2)

この条件のもとでは $(1-r-s)^{n-1} \rightarrow 0$ なので, 一般項から直ちに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{s\alpha + r\beta}{r+s}$$

を得る.

【総評】 難度 5, 計算量 4, 目安時間 15 分. 差 $a_n - b_n$ は公比 $1-r-s$ の等比数列であり, $\alpha \neq \beta$ によって $|1-r-s| < 1$ が必要十分条件になる. 共通極限を出すには差の収束だけでは足りず, 不変量 $sa_n + rb_n$ または 2 つの固有方向から一般項を決める必要がある.

【第 2 問】

- (1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。
 (2) a, b を有理数とする. 多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $f(1 + \sqrt{3}) = 0$ を満たすとき, a, b を求めよ.
 (3) n を 2 以上の自然数とする. $g(x)$ は有理数を係数とする n 次多項式で最高次の係数が 1 であるとする.
 $g(1 + \sqrt{3}) = 0$ となるとき, $g(1 - \sqrt{3}) = 0$ を示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は既約分数 p/q を仮定して 3 が分子・分母の両方を割る矛盾を導く. (2) は $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ を代入し, 有理数部分と $\sqrt{3}$ の係数を分離する. (3) は (2) で得た最小の 2 次式 $x^2 - 2x - 2$ で $g(x)$ を割り, 1 次以下の余りが $1 + \sqrt{3}$ で 0 なら余り自体が 0 であることを (1) から示す.

【解答】

(1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定し

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

と既約分数で表す. ただし p, q は正の整数とする. 2 乗して $p^2 = 3q^2$ だから p^2 は 3 の倍数であり, p も 3 の倍数である. $p = 3k$ とおくと

$$9k^2 = 3q^2, \quad q^2 = 3k^2$$

となり, q も 3 の倍数である. これは p/q が既約であることに反する. よって $\sqrt{3}$ は無理数である.

(2) $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ より

$$0 = f(1 + \sqrt{3}) = (4 + a + b) + (2 + a)\sqrt{3}.$$

もし $2 + a \neq 0$ なら $\sqrt{3} = -(4 + a + b)/(2 + a)$ は有理数となり, (1) に反する. したがって $2 + a = 0$ であり, さらに $4 + a + b = 0$ である. よって

$$a = -2, \quad b = -2$$

である.

(3) $h(x) = x^2 - 2x - 2$ とおく. (2) より $h(1 + \sqrt{3}) = 0$ である. 有理数係数の多項式の割り算により

$$g(x) = h(x)q(x) + ux + v$$

と書ける. ただし $q(x)$ は有理数係数の多項式, u, v は有理数である. $x = 1 + \sqrt{3}$ を代入すると

$$u(1 + \sqrt{3}) + v = 0.$$

$u \neq 0$ なら $\sqrt{3} = -(u + v)/u$ が有理数となるので, (1) に反する. よって $u = 0$, さらに $v = 0$ である. したがって $g(x) = h(x)q(x)$ である.

一方

$$h(1 - \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 2 = 0$$

だから

$$g(1 - \sqrt{3}) = h(1 - \sqrt{3})q(1 - \sqrt{3}) = 0.$$

▶ 解法 2

【方針】

(3) では多項式除法を使わず, $g(1 + \sqrt{3})$ を二項展開して $A + B\sqrt{3}$ の形に整理する. 係数が有理数であるため A, B も有理数であり, 無理数性から $A = B = 0$ が従う. $\sqrt{3}$ の符号を変えれば共役な値も 0 になる.

【解答】

(1)

$\sqrt{3} = p/q$ と既約分数で表せると仮定する. 2 乗して $p^2 = 3q^2$ だから $3 \mid p$ である. $p = 3m$ とおくと $q^2 = 3m^2$ となり $3 \mid q$ でもある. これは既約性に反するので, $\sqrt{3}$ は無理数である.

(2)

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + \sqrt{3})^2 + a(1 + \sqrt{3}) + b \\ &= (4 + a + b) + (2 + a)\sqrt{3} \end{aligned}$$

である. (1) の無理数性より

$$4 + a + b = 0, \quad 2 + a = 0$$

だから

$$a = b = -2$$

である.

(3)

$g(x)$ の係数はすべて有理数である. $(1 + \sqrt{3})^j$ を二項展開し, $(\sqrt{3})^2 = 3$ を用いて整理すれば, ある有理数 A, B を用いて

$$g(1 + \sqrt{3}) = A + B\sqrt{3}$$

と書ける. 仮定より左辺は 0 なので, (1) から

$$A = B = 0$$

でなければならない.

同じ二項展開で $\sqrt{3}$ を $-\sqrt{3}$ に替えると

$$g(1 - \sqrt{3}) = A - B\sqrt{3}$$

となる. すでに $A = B = 0$ だから

$$g(1 - \sqrt{3}) = 0$$

である.

【総評】 難度 6, 計算量 4, 目安時間 18 分. (1) の無理数性を (2)(3) で段階的に使う構成である. (3) は「共役だから 0」とだけ書かず, 多項式除法で余りを 0 とするか, 二項展開で $A + B\sqrt{3}$ の有理係数を分離する. 最高次係数 1 は議論を妨げないが, 答案では与えられた条件のもとで証明を完結させる.

【第 3 問】

O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(-2, -2, 0)$, $B(6, -2, 0)$, $C(-2, 4, 0)$ をとり, 球 $S: x^2 + y^2 + (z - 4)^2 \leq 4$ を考える.

- (1) 三角形 ABC の周または内部の点を P とする. このとき, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ となる 0 以上の 3 つの実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ と表されることを示せ.
- (2) 点 P が三角形 ABC の周および内部を, 点 Q は球 S の表面および内部を動くとき, 線分 PQ の中点 M が動いてできる立体を V とする. 3 点 A', B', C' に対して, 大きさ 1 以下のベクトル $\vec{r}$ と $\alpha + \beta + \gamma = 1$ となる 0 以上の 3 つの実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{OR} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'} + \gamma\overrightarrow{OC'} + \vec{r}$ と表される点 R 全体のなす集合を W とする. V と W が一致するような 3 点 A', B', C' を求めよ.
- (3) 立体 V の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $P = A + u(B - A) + v(C - A)$ と置き, 三角形内の条件 $u, v \geq 0, u + v \leq 1$ を係数へ読み替える. (2) では球の中心を $H = (0, 0, 4)$ とし, $Q = H + 2\vec{r}$, $|\vec{r}| \leq 1$ と表す. 中点は三角形 $(A + H)/2, (B + H)/2, (C + H)/2$ と単位球の和になる. (3) は高さ $2 + h$ の断面を考え, 半径 $\sqrt{1 - h^2}$ だけ平面三角形を外側へ広げた図形の面積を積分する.

【解答】

(1) 三角形 ABC は A を直角とする三角形である. $P = (x, y, 0)$ とすると, P が三角形の周または内部にあるための条件は

$$x \geq -2, \quad y \geq -2, \quad 3x + 4y \leq 10 \quad \text{である.}$$

ここで

$$u = \frac{x + 2}{8}, \quad v = \frac{y + 2}{6}$$

とおくと $u, v \geq 0$ であり, 最後の不等式から $u + v \leq 1$ である. また

$$P = A + u(B - A) + v(C - A).$$

したがって $\alpha = 1 - u - v$, $\beta = u$, $\gamma = v$ とおけば, 3 数は 0 以上で和が 1 となり

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$$

と表される.

(2) 球 S の中心を $H = (0, 0, 4)$ とする. 球内の点 Q は

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OH} + 2\vec{r} \quad (|\vec{r}| \leq 1)$$

と表せる. (1) の表示を用いると, 中点 M は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \\ &= \alpha \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}}{2} + \beta \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}}{2} + \gamma \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}}{2} + \vec{r}. \end{aligned}$$

したがって

$$A' = \frac{A + H}{2} = (-1, -1, 2), \quad B' = \frac{B + H}{2} = (3, -1, 2), \quad C' = \frac{C + H}{2} = (-1, 2, 2)$$

とすれば V の全ての点は W に属する. 逆に, この表示を満たす係数と $\vec{r}$ から (1) の点 P と球内の点 $Q = H + 2\vec{r}$ を作れば, その中点が R になる. よって $V = W$ である.

(3) 三角形 $A'B'C'$ は辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形であり, 面積は 6, 周の長さは 12 である. 平面 $z = 2 + h$ で V を切る. ただし $-1 \leq h \leq 1$ とする. この断面は, 三角形 $A'B'C'$ を平面内で

$$\rho = \sqrt{1 - h^2}$$

だけ外側へ広げた図形である.

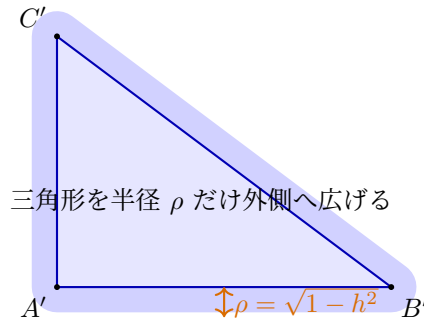
この平面図形は、もとの三角形、3 辺に沿う幅 ρ の長方形、および 3 頂点の外側にできる扇形に分けられる。外角の和は 2π なので扇形の面積の和は $\pi\rho^2$ である。したがって断面積は

$$6 + 12\rho + \pi\rho^2 = 6 + 12\sqrt{1-h^2} + \pi(1-h^2).$$

よって

$$\begin{aligned} \text{立体 } V \text{ の体積} &= \int_{-1}^1 \left\{ 6 + 12\sqrt{1-h^2} + \pi(1-h^2) \right\} dh \\ &= 12 + 12 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \frac{4}{3} \\ &= 12 + \frac{22\pi}{3}. \end{aligned}$$

【水平断面の形】



▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) で立体 V が三角形 $A'B'C'$ と単位球の和であることを確認する。体積は水平断面積分ではなく、三角柱、3 辺に沿う半円柱、3 頂点に付く球形の扇形へ重複なく分解して求める。

【解答】

(1)

$$A + u(B - A) + v(C - A) = (-2 + 8u, -2 + 6v, 0)$$

とおく。三角形 ABC の周または内部では

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u + v \leq 1$$

である。そこで

$$\alpha = 1 - u - v, \quad \beta = u, \quad \gamma = v$$

とすれば、3 数は 0 以上で和が 1 となり

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$$

を得る。

(2)

球の中心を $H = (0, 0, 4)$ とすると

$$Q = H + 2\vec{r}, \quad |\vec{r}| \leq 1$$

と書ける。したがって中点 M は

$$M = \alpha \frac{A+H}{2} + \beta \frac{B+H}{2} + \gamma \frac{C+H}{2} + \vec{r}$$

である。よって

$$A' = (-1, -1, 2), \quad B' = (3, -1, 2), \quad C' = (-1, 2, 2)$$

とすればよい。逆向きも同じ式から成り立つので $V = W$ である。

(3)

三角形 $A'B'C'$ は辺長 3, 4, 5, 面積 6, 周長 12 の直角三角形である. V はこの三角形から距離 1 以下にある点全体であり, 次の 3 種類へ分解できる.

部分	体積
三角形を上下に厚さ 1 ずつ広げた三角柱	$2 \cdot 6 = 12$
3 辺に沿う半円柱	$\frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi$
3 頂点に付く球形の扇形	$\frac{4\pi}{3}$

最後の球形部分は, 平面三角形の外角の和が 2π であるため, 3 頂点分を合わせると単位球 1 個分になる. したがって

$$\text{Vol}(V) = 12 + 6\pi + \frac{4\pi}{3} = 12 + \frac{22\pi}{3}$$

である.

【総評】 難度 8, 計算量 7, 目安時間 30 分. 中点を取ることで, 半径 2 の球が半径 1 の球へ縮み, 三角形の各頂点は球の中心との中点 A', B', C' へ移る. 体積は水平断面の平行図形を積分する方法と, 三角柱・半円柱・球形部分へ分解する方法を収録した. いずれも重複なく $12 + 22\pi/3$ となることを確認できる.

【第 4 問】

a, b, c を実数とする. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x^3$ とおく. 2 つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフが異なる 2 点 P, Q を共有している. さらに点 P での 2 つのグラフの接線が一致し, 点 Q での 2 つのグラフの接線は直交しているとする. これらの条件を満たすように a, b, c を変化させるとき, 2 つのグラフで囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ.

【方針】

共有点 P, Q の x 座標を p, q とする. 差 $h(x) = g(x) - f(x)$ は最高次係数 1 の 3 次式で, P では値と導関数が 0, Q では値が 0 なので $h(x) = (x - p)^2(x - q)$. Q における 2 接線の傾きの積が -1 という条件から距離 $d = |q - p|$ を評価する. 囲まれた面積は相似変形で $d^4/12$ となり, 相加相乗平均で最小値を決める.

【解答】

点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とする. $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと, $h(x)$ は最高次係数 1 の 3 次式である. 点 P では 2 曲線の値と接線が一致するので

$$h(p) = h'(p) = 0$$

であり, 点 Q では $h(q) = 0$ である. $p \neq q$ だから

$$h(x) = (x - p)^2(x - q).$$

したがって

$$h'(q) = (q - p)^2.$$

一方 $h' = g' - f'$ であり $g'(q) = 3q^2$ だから

$$f'(q) = 3q^2 - (q - p)^2.$$

点 Q で 2 接線は直交するので, 傾きの積は -1 である. よって

$$3q^2\{3q^2 - (q - p)^2\} = -1.$$

特に $q \neq 0$ であり

$$(q - p)^2 = 3q^2 + \frac{1}{3q^2}.$$

相加相乗平均より

$$(q - p)^2 \geq 2,$$

等号は $3q^2 = 1$ のときに成り立つ.

2 曲線で囲まれた部分の面積は

$$S = \int_p^q |(x - p)^2(x - q)| dx$$

である. $d = |q - p|$ とおき, 区間を長さ d に拡大・縮小して計算すると

$$\begin{aligned} S &= d^4 \int_0^1 u^2(1-u) du \\ &= \frac{d^4}{12}. \end{aligned}$$

$d^2 \geq 2$ だから

$$S \geq \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

最後に等号が実現することを確認する. 例えば $q = 1/\sqrt{3}$, $p = q - \sqrt{2}$ とし

$$h(x) = (x-p)^2(x-q), \quad f(x) = x^3 - h(x)$$

と定める. f は 2 次以下の多項式であり, p, q は異なる 2 共有点, p では接線が一致する. また $(q-p)^2 = 2$, $3q^2 = 1$ なので q で接線は直交する. したがって最小値は

$$\frac{1}{3}$$

である.

【総評】 難度 8, 計算量 6, 目安時間 25 分. 2 曲線の差を $h(x) = (x-p)^2(x-q)$ と因数分解できるかが核心である. 直交条件から $d^2 = (q-p)^2 = 3q^2 + 1/(3q^2) \geq 2$, 面積から $S = d^4/12$ を得る. 下界だけで終えず, 等号条件 $3q^2 = 1, d^2 = 2$ を満たす 2 次式を実際に構成して最小値の達成を示す.