

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2010 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

p は素数、 r は正の整数とする。

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_r$ についての式 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p$ を展開したときの単項式 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_r^{p_r}$ の係数を求めよ。ここで、 $p_1, p_2, \dots, p_r$ は 0 または正の整数で $p_1 + p_2 + \dots + p_r = p$ を満たすとする。
- (2) $x_1, x_2, \dots, x_r$ が正の整数のとき、 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p - (x_1^p + x_2^p + \dots + x_r^p)$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r は p で割り切れないとする。このとき、 $r^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

第 2 問

$a > 0$ は定数、 $0 < \theta < \pi/2$ とする。 xyz 空間で $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする。 S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1 、 S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする。

- (1) S_1 の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ。
- (2) S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき、 $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

第 3 問

曲線 $C: y = e^x/(1 + e^x)$ 上に点 $A(a, e^a/(1 + e^a))$ をとる。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) C 上にあり A とは異なる点 $P(p, e^p/(1 + e^p))$ について、そこでの接線が A での接線と平行となるように p の値を定めよ。
- (2) p は (1) で定めた値とする。 C と x 軸および 2 直線 $x = a$ 、 $x = p$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

第 4 問

円 C は、2つの放物線 $P_1 : y = x^2/(4a)$ ($a > 0$) と $P_2 : y = -x^2/(4b) + m$ ($b > 0, m > 0$) で囲まれた領域内にあり、両方の放物線と共有点をもち、さらに y 軸上に中心をもつとする。

- (1) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 1 点のみを共有するならば、 $m \leq 4a$ かつ $m \leq 4b$ であることを示せ。
- (2) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 2 点のみを共有するならば、 $(a+b)^2 < ma$ かつ $(a+b)^2 < mb$ であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)