

大阪大学 2010 年度 理系（後期）

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 p は素数、 r は正の整数とする。

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_r$ についての式 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p$ を展開したときの単項式 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_r^{p_r}$ の係数を求めよ。ここで、 $p_1, p_2, \dots, p_r$ は 0 または正の整数で $p_1 + p_2 + \dots + p_r = p$ を満たすとする。
- (2) $x_1, x_2, \dots, x_r$ が正の整数のとき、 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p - (x_1^p + x_2^p + \dots + x_r^p)$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r は p で割り切れないとする。このとき、 $r^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

【方針】

(1) は p 個の因子から各 x_i を選ぶ位置の分け方を数える。(2) では純粋な x_i^p 以外の項は少なくとも 2 種類の文字を含むため、各正の指数は p 未満である。その係数の分子 $p!$ だけが素因数 p を含むことから整除性を示す。(3) は (2) に全ての $x_i = 1$ を代入し、 r と p が互いに素であることを使う。

【解答】

(1) p 個の因子から、 x_1 を選ぶ位置を p_1 個、続いて x_2 を選ぶ位置を p_2 個というように選ぶ。したがって係数は

$${}_p C_{p_1 p - p_1} {}_p C_{p_2} \dots {}_p C_{p_1 - \dots - p_{r-1}} {}_p C_{p_r} = \frac{p!}{p_1! p_2! \dots p_r!}$$

である。ただし $0! = 1$ とする。

(2) 展開に現れる項のうち、1 種類の文字だけを選んでできる項は $x_1^p, x_2^p, \dots, x_r^p$ であり、いずれも係数は 1 である。したがって問題の差に残る各単項式は少なくとも 2 種類の文字を含む。

そのような項では、 $p_i > 0$ である指数は全て p 未満である。(1) の係数

$$\frac{p!}{p_1! p_2! \dots p_r!}$$

において、分子は素因数 p を 1 個含むが、各 $p_i!$ は素因数 p を含まない。係数は整数だから、この係数は p で割り切れる。よって差に含まれる全ての項の係数が p で割り切れ、差全体も p で割り切れる。

(3) (2) で $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1$ とすると

$$r^p - r$$

は p で割り切れる。すなわち $r(r^{p-1} - 1)$ は p で割り切れる。 p は素数で r は p で割り切れないから、 r と p は互いに素である。したがって $r^{p-1} - 1$ が p で割り切れる。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 18 分程度。(1) の多項展開係数を組合せの積として説明し、階乗表示まで導くことが出発点。(2) では「純粋な p 乗項を引いた後に残る項は少なくとも 2 種類の文字を含む」ため、分母の階乗に p が現れないと明示するのが採点上重要である。(3) は有名定理の名前だけで済ませず、(2) に 1 を代入して同じ結論を問題内で証明する。最後に $p \nmid r$ から積の一方を消去する根拠も書きたい。

【第 2 問】

$a > 0$ は定数、 $0 < \theta < \pi/2$ とする。 xyz 空間で $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする。 S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1 、 S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする。

(1) S_1 の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ。

(2) S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき、 $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

球の中心を基準にした座標で、切断面に平行な円の面積を積分する。(1) では中心からの y 方向変位を u とし、 $-a \leq u \leq -a \sin \theta$ を積分する。(2) の S_2 は $\sin \theta$ を $\cos \theta$ に替えた同形の球冠である。第 3 象限側では原点から中心までの距離が半径に等しいため S_1, S_2 の内部は重ならない。残りの体積を $s = \sin \theta + \cos \theta$ で整理し、 $s \leq \sqrt{2}$ を使う。

【解答】

(1) 球の中心の y 座標は $a \sin \theta$ である。中心からの y 方向の変位を u とすると、その位置で球を zx 平面に平行に切った断面積は $\pi(a^2 - u^2)$ である。 S_1 では $-a \leq u \leq -a \sin \theta$ だから

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= \pi \int_{-a}^{-a \sin \theta} (a^2 - u^2) du \\ &= \pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \sin \theta + \frac{\sin^3 \theta}{3} \right). \end{aligned}$$

(2) 同様に、 S_2 の体積は

$$\pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)$$

である。また球の中心と原点の距離は

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} = a$$

で、半径に等しい。実際、 $x < 0, y < 0$ なら

$$(x - a \cos \theta)^2 + (y - a \sin \theta)^2 + z^2 > a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = a^2$$

であるから、そのような点は球の内部に入らない。よって S_1 と S_2 の内部は重ならない。

球 S の体積は $4\pi a^3/3$ だから

$$V(\theta) = \pi a^3 \left\{ \sin \theta + \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{3} \right\}.$$

$s = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。 $\sin \theta \cos \theta = (s^2 - 1)/2$ より

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = s^3 - 3 \sin \theta \cos \theta s = -\frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{2}s.$$

したがって

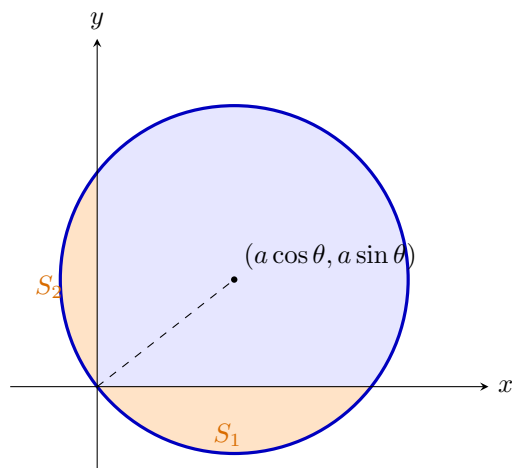
$$V(\theta) = \pi a^3 \left(\frac{s}{2} + \frac{s^3}{6} \right).$$

$0 < \theta < \pi/2$ では $1 < s \leq \sqrt{2}$ であり、 $s/2 + s^3/6$ は正の s とともに増加する。最大値は $\theta = \pi/4$ 、 $s = \sqrt{2}$ のときにとり

$$\max V(\theta) = \pi a^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{6} \pi a^3$$

である。

【球と 2 つの切断平面】



xy 平面での断面。原点は球面上にあり、橙の 2 部分の内部は重ならない。

▶ 解法 2

【方針】

(1) S_1 を高さ $a(1 - \sin \theta)$ の球冠とみなす。(2) S_2 も同様に求め、重なりがないことを確認して球全体から引く。

【解答】

(1) S_1 は半径 a 、高さ

$$h_1 = a - a \sin \theta = a(1 - \sin \theta)$$

の球冠である。半径 a 、高さ h の球冠の体積は

$$\frac{\pi h^2(3a - h)}{3}$$

なので

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= \frac{\pi a^3}{3} (1 - \sin \theta)^2 (2 + \sin \theta) \\ &= \pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \sin \theta + \frac{\sin^3 \theta}{3} \right). \end{aligned}$$

(2) 同様に

$$\text{vol}(S_2) = \pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right).$$

球の中心から原点までの距離は a で、原点は球面上にある。 $x < 0, y < 0$ の点は球の内部に入らないため、 S_1, S_2 の内部は重ならない。

よって $s = \sin \theta + \cos \theta$ とおけば

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \pi a^3 \left\{ \sin \theta + \cos \theta - \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{3} \right\} \\ &= \pi a^3 \left(\frac{s}{2} + \frac{s^3}{6} \right). \end{aligned}$$

$1 < s \leq \sqrt{2}$ で右辺は s とともに増加する。したがって $\theta = \pi/4$ のとき最大となり

$$\max V(\theta) = \frac{5\sqrt{2}}{6} \pi a^3$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 25 分程度。(1) は球冠公式を暗記で書くより、中心からの変位で断面積 $\pi(a^2 - u^2)$ を積分すると境界を確認しやすい。(2) では S_1, S_2 を単純に引く前に内部が重ならないことを示す必要がある。中心が第 1 象限にあり原点が球面上にあるため、第 3 象限へ進むと中心からの距離が半径を超える。最後は三角関数の三乗和を $s = \sin \theta + \cos \theta$ だけで表すと最大値判定が短くなる。

【第 3 問】

曲線 $C: y = e^x/(1+e^x)$ 上に点 $A(a, e^a/(1+e^a))$ をとる。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) C 上にあり A とは異なる点 $P(p, e^p/(1+e^p))$ について、そこでの接線が A での接線と平行となるように p の値を定めよ。
- (2) p は (1) で定めた値とする。 C と x 軸および 2 直線 $x = a$ 、 $x = p$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

関数 $f(x) = e^x/(1+e^x)$ を微分し、接線の傾き $f'(x) = e^x/(1+e^x)^2$ が x と $-x$ で等しいことを使う。傾き方程式を $X = e^p$ の二次方程式として解き、 $p = a$ 以外の解が $-a$ だけであることも確認する。(2) は円板法で体積を定積分として表し、 $u = e^x$ の置換で積分する。

【解答】

(1) $f(x) = e^x/(1+e^x)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

である。 $X = e^p > 0$ 、 $A = e^a > 1$ とおけば、接線が平行である条件は

$$\frac{X}{(1+X)^2} = \frac{A}{(1+A)^2}$$

である。整理すると

$$AX^2 - (1+A^2)X + A = 0$$

となり

$$(X-A)\left(X - \frac{1}{A}\right) = 0$$

と因数分解できる。点 P は A と異なるので $X \neq A$ であり、 $X = 1/A = e^{-a}$ である。したがって

$$p = -a$$

である。

(2) (1) より $p = -a$ である。円板法により、求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^2 dx.$$

$u = e^x$ とおけば $dx = du/u$ であるから

$$\int \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^2 dx = \int \frac{u}{(1+u)^2} du = \log(1+u) + \frac{1}{1+u}.$$

よって

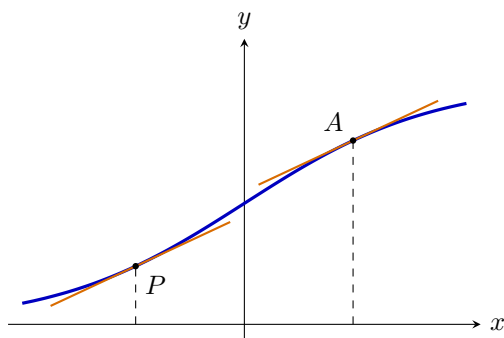
$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \left[\log(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} \right]_{-a}^a \\ &= \log \frac{1+e^a}{1+e^{-a}} + \frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1+e^{-a}} \\ &= a - \frac{e^a - 1}{e^a + 1}. \end{aligned}$$

したがって

$$V = \pi \left(a - \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right)$$

である。

【対称な 2 点と平行な接線】



$f'(-a) = f'(a)$ で、異なる点は $p = -a$ 。また $f(-x) = 1 - f(x)$ 。

▶ 解法 2

【方針】

(1) $f'(-x) = f'(x)$ と傾き方程式から $p = -a$ を確定する。(2) $f(-x) = 1 - f(x)$ 、 $f'(x) = f(x)\{1 - f(x)\}$ を使って対称区間の積分を短く計算する。

【解答】

(1) $f(x) = e^x/(1 + e^x)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

であり、 $f'(-x) = f'(x)$ である。さらに $X = e^p$ 、 $A = e^a$ において $f'(p) = f'(a)$ を整理すると

$$(X - A) \left(X - \frac{1}{A} \right) = 0.$$

$P \neq A$ だから $X = 1/A$ 、すなわち

$$p = -a$$

である。

(2) $f(-x) = 1 - f(x)$ かつ

$$f'(x) = f(x)\{1 - f(x)\}$$

である。円板法と対称性により

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-a}^a f(x)^2 dx \\ &= \int_0^a \{f(x)^2 + f(-x)^2\} dx \\ &= \int_0^a \{f(x)^2 + (1 - f(x))^2\} dx \\ &= \int_0^a \{1 - 2f'(x)\} dx \\ &= a - 2\{f(a) - f(0)\}. \end{aligned}$$

$f(0) = 1/2$ 、 $f(a) = e^a/(1 + e^a)$ だから

$$V = \pi \left(a - \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right)$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 14 分程度。(1) では導関数の $x \leftrightarrow -x$ の対称性が見えるが、答案では傾き方程式を二次式にして他の解がないことまで示すと確実である。(2) は回転区間が $[-a, a]$ であること、半径が常に $f(x) > 0$ であることを確認して円板法を適用する。置換後の積分 $u/(1 + u)^2$ は $1/(1 + u) - 1/(1 + u)^2$ に分け、端点整理で $(1 + e^a)/(1 + e^{-a}) = e^a$ を使うと短い。

【第 4 問】

円 C は、2つの放物線 $P_1: y = x^2/(4a)$ ($a > 0$) と $P_2: y = -x^2/(4b) + m$ ($b > 0, m > 0$) で囲まれた領域内にあり、両方の放物線と共有点をもち、さらに y 軸上に中心をもつとする。

- (1) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 1 点のみを共有するならば、 $m \leq 4a$ かつ $m \leq 4b$ であることを示せ。
 (2) C が P_1 および P_2 のそれぞれと 2 点のみを共有するならば、 $(a+b)^2 < ma$ かつ $(a+b)^2 < mb$ であることを示せ。

【方針】

円の中心を $(0, c)$ 、半径を r とする。下側の放物線では $x^2 = 4ay$ を円の式へ代入し、共有点の高さ y に関する二次方程式を作る。上側では $z = m - y$ と置いて同じ形にする。(1) では共有点が 1 点なら対称性から両頂点で接し、残る根が領域外となる条件を読む。(2) では 2 個の共有点が対称な接点となるので二次方程式は正の重解をもち、重解の位置と判別式から半径の厳密な下界を得る。

【解答】

円 C の中心を $(0, c)$ 、半径を r とする。下側の放物線 P_1 上では $x^2 = 4ay$ だから、円との共有点の y 座標は

$$y^2 + (4a - 2c)y + c^2 - r^2 = 0$$

を満たす。上側では $z = m - y$ とおくと $x^2 = 4bz$ であり、共有点の z 座標は

$$z^2 + \{4b - 2(m - c)\}z + (m - c)^2 - r^2 = 0$$

を満たす。

(1) 放物線と円はいずれも y 軸対称である。共有点が 1 個だけならその点は y 軸上にあり、 P_1 とは $(0, 0)$ 、 P_2 とは $(0, m)$ で共有する。円は 2 放物線の間にあるので $0 < c < m$ であり

$$r = c = m - c, \quad m = 2r$$

である。

下側の交点方程式に $r = c$ を代入すると

$$y(y + 4a - 2c) = 0.$$

$y = 0$ 以外に $y > 0$ の根をもたないため $2c - 4a \leq 0$ 、すなわち $c \leq 2a$ である。よって $m = 2c \leq 4a$ である。

同様に上側の交点方程式へ $r = m - c$ を代入すると

$$z\{z + 4b - 2(m - c)\} = 0.$$

$z = 0$ 以外に $z > 0$ の根をもたないため $m - c \leq 2b$ である。 $m - c = r = m/2$ より $m \leq 4b$ である。

(2) 各放物線との 2 共有点は y 軸に関して対称で、 $x \neq 0$ である。円は 2 放物線で囲まれた領域内にあるため、共有点で曲線を横切ることなく、2 つの交点方程式はそれぞれ正の重解をもつ。

下側の交点方程式の重解は $y = c - 2a > 0$ であり、判別式を 0 とすると

$$r^2 = 4a(c - a).$$

$c - 2a > 0$ だから $c > 2a$ 、したがって $r^2 > 4a^2$ である。同様に上側の交点方程式の重解は $z = m - c - 2b > 0$ であり

$$r^2 = 4b(m - c - b), \quad r^2 > 4b^2$$

を得る。

2 つの等式から

$$c = a + \frac{r^2}{4a}, \quad m - c = b + \frac{r^2}{4b}$$

である。これらを加えると

$$m = a + b + \frac{r^2(a+b)}{4ab}.$$

ここで $r^2 > 4b^2$ を使えば

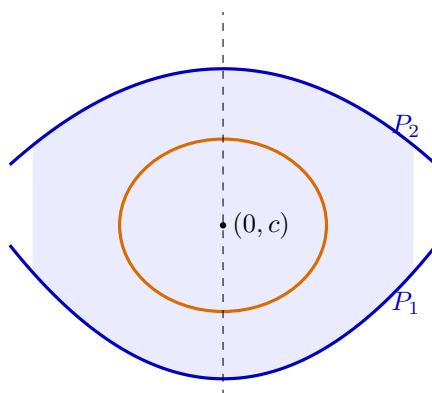
$$m > a + b + \frac{b(a+b)}{a} = \frac{(a+b)^2}{a}$$

であり、 $(a+b)^2 < ma$ を得る。また $r^2 > 4a^2$ を使えば

$$m > a + b + \frac{a(a+b)}{b} = \frac{(a+b)^2}{b}$$

であり、 $(a+b)^2 < mb$ を得る。

【2つの放物線と内接する円】



中心を $(0, c)$ 、半径を r とし、共有点の高さについて 2 次方程式を作る。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 30 分程度。中心を $(0, c)$ と置き、交点条件を x ではなく高さ y と上端からの深さ $z = m - y$ の二次方程式にするのが核心である。(1) は対称性から唯一の共有点が頂点だと判断し、第 2 の正根がない条件を読む。(2) では領域内に収まる円なので共有点は交点ではなく接点であり、二次式が正の重解をもつ。重解が正であるという厳密不等式が $r > 2a, 2b$ を生み、最後の 2 本の不等式につながるため省略できない。