

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2010 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

関数 $f(x) = 2\log(1 + e^x) - x - \log 2$ を考える．ただし，対数は自然対数であり， e は自然対数の底とする．

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする．等式 $\log f''(x) = -f(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分

$$\int_0^{\log 2} (x - \log 2)e^{-f(x)} dx$$

を求めよ．

第 2 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 2 つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする. P における C_1 , C_2 の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とし, y 軸と l_1 , l_2 の交点をそれぞれ Q , R とする. θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 線分 QR の長さの最小値を求めよ.

第 3 問

l, m, n を 3 以上の整数とする. 等式 $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$ を満たす l, m, n の組をすべて求めよ.

第 4 問

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

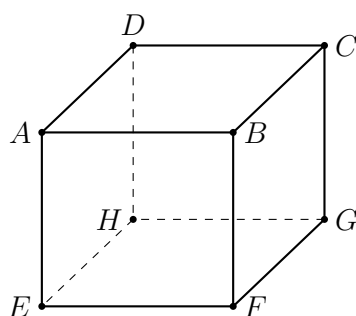
(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

第 5 問

n を 0 以上の整数とする．立方体 $ABCD-EFGH$ の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し， Q は頂点 C に位置している．時刻 n において， P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には， P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り， Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻 n において， P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない．

- (1) 時刻 1 において， P と Q が異なる頂点に位置するとき， P と Q はどの頂点にあるか．可能な組み合わせをすべて挙げよ．
- (2) 時刻 n において， P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ．
- (3) 時刻 n において， P と Q がともに上面 $ABCD$ の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 $EFGH$ の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする．また，時刻 n において， P と Q のいずれか一方が上面 $ABCD$ ，他方が下面 $EFGH$ にある確率を q_n とする． p_{n+1} を， p_n と q_n を用いて表せ．
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$ を求めよ．



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)