

大阪大学 2010 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $f(x) = 2 \log(1 + e^x) - x - \log 2$ を考える. ただし, 対数は自然対数であり, e は自然対数の底とする.(1) $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする. 等式 $\log f''(x) = -f(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) 定積分

$$\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx$$

を求めよ.

【方針】

(1) は $f'(x), f''(x)$ を直接計算し, さらに $e^{-f(x)}$ を指数法則で整理して同じ式になることを示す. $f''(x) > 0$ も確認しておくとお互に定義できる. (2) は (1) から $e^{-f(x)} = f''(x)$ と置き換え, $L = \log 2$ として, 置き換えた定積分を部分積分する. 端点で $f'(0) = 0$ が効くので, 最後は $f(0) - f(L)$ の計算に帰着する.

【解答】

(1) $f(x) = 2 \log(1 + e^x) - x - \log 2$ である. まず微分すると

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{e^x}{1 + e^x} - 1 = \frac{2e^x - (1 + e^x)}{1 + e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

である. さらに $f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$ である. 特に $f''(x) > 0$ である.

一方, $e^{-f(x)} = e^{-2 \log(1 + e^x) + x + \log 2}$ であるから $e^{-f(x)} = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$ となる. よって $f''(x) = e^{-f(x)}$ である. 両辺は正なので対数をとることができ, $\log f''(x) = -f(x)$ が成り立つ.

(2) $L = \log 2$ とおく. (1) より $e^{-f(x)} = f''(x)$ であるから, 求める積分は

$$I = \int_0^L (x - L) f''(x) dx$$

である.

部分積分を用いると

$$I = [(x - L) f'(x)]_0^L - \int_0^L f'(x) dx$$

である. ここで $x = L$ では $(x - L) = 0$ であり, $x = 0$ では $f'(0) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$ である. したがって境界項は 0 で,

$$I = - \int_0^L f'(x) dx = -(f(L) - f(0)) = f(0) - f(L)$$

となる. $f(0)$ は $f(0) = 2 \log 2 - 0 - \log 2 = \log 2$ である. また $L = \log 2$ なので $e^L = 2$ であり, $f(L) = 2 \log(1 + 2) - \log 2 - \log 2 = 2 \log 3 - 2 \log 2$ である.

ゆえに $I = \log 2 - (2 \log 3 - 2 \log 2) = 3 \log 2 - 2 \log 3 = \log \frac{8}{9}$ である. 積分区間では $x - L \leq 0$, $e^{-f(x)} > 0$ なので, 結果が負になることも合っている.

【総評】 目安時間は 18 分前後. (1) の微分計算は標準的だが, $e^{-f(x)}$ を丁寧に整理して $f''(x)$ と一致させるところが誘導の中心である. (2) は $e^{-f} = f''$ に置き換えた後の部分積分で, 境界項が $f'(0) = 0$ により消える点を明記したい. 最後の値は $\log(8/9)$ で負なので, 符号の確認も答案の信頼性を上げる.

【第 2 問】

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 2 つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする. P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし, y 軸と l_1, l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする. θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 線分 QR の長さの最小値を求めよ.

【方針】

$c = \cos \theta, s = \sin \theta$ とおき, 2 曲線を連立して正の交点 P の座標を求める. 接線は, 楕円・双曲線の標準的な接線公式を使って y 軸との交点だけを求めればよい. Q, R の y 座標の差が $1/s + 2s$ になるので, $0 < s < 1$ で相加相乗または微分により最小化する.

【解答】

$c = \cos \theta, s = \sin \theta$ とおく. 条件 $0 < \theta < \pi/2$ より $0 < c < 1, 0 < s < 1$ である.

交点 P の座標を求める. $u = x^2, v = y^2$ とおくと, 2 曲線の式は $u + 3v = 3$ および $\frac{u}{c^2} - \frac{v}{s^2} = 2$ である. 第 1 式から $u = 3 - 3v$ であり, これを第 2 式に代入すると $\frac{3 - 3v}{c^2} - \frac{v}{s^2} = 2$ である. 両辺に $c^2 s^2$ を掛けて $3s^2 - 3vs^2 - vc^2 = 2c^2 s^2$ となる. したがって $v(3s^2 + c^2) = s^2(3 - 2c^2)$ である. $c^2 + s^2 = 1$ より $3s^2 + c^2 = 1 + 2s^2, 3 - 2c^2 = 1 + 2s^2$ だから $v = s^2$ である. よって $y > 0$ より $y = s$ であり, 第 1 式から $x^2 = 3 - 3s^2 = 3c^2$ なので, $x > 0$ より $x = \sqrt{3}c$ である. したがって $P = (\sqrt{3}c, s)$ である.

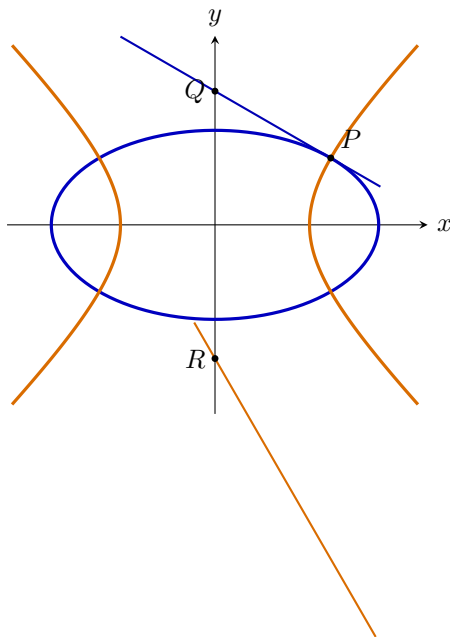
次に接線を求める. $C_1 : x^2 + 3y^2 = 3$ の点 (x_0, y_0) における接線は $x_0 x + 3y_0 y = 3$ である. $P = (\sqrt{3}c, s)$ を代入して $l_1 : \sqrt{3}cx + 3sy = 3$ である. y 軸との交点では $x = 0$ なので $3sy = 3$ より $Q = \left(0, \frac{1}{s}\right)$ である.

また, $C_2 : x^2/c^2 - y^2/s^2 = 2$ の点 (x_0, y_0) における接線は $\frac{x_0 x}{c^2} - \frac{y_0 y}{s^2} = 2$ である. したがって $l_2 : \frac{\sqrt{3}c}{c^2}x - \frac{s}{s^2}y = 2$ すなわち $\frac{\sqrt{3}}{c}x - \frac{1}{s}y = 2$ である. $x = 0$ とすると $-\frac{1}{s}y = 2$ だから $R = (0, -2s)$ である.

よって線分 QR の長さは $QR = \frac{1}{s} - (-2s) = \frac{1}{s} + 2s$ である. $0 < s < 1$ でこれを最小にする. 相加相乗平均より $\frac{1}{s} + 2s \geq 2\sqrt{\frac{1}{s} \cdot 2s} = 2\sqrt{2}$ である. 等号は $\frac{1}{s} = 2s$ すなわち $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つ. この値は $0 < s < 1$ を満たす.

したがって求める最小値は $2\sqrt{2}$ である.

【交点と2本の接線】



最小時は $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$ 。Q, R は2本の接線の y 切片。

【総評】 目安時間は20分前後。交点 $P = (\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$ を正確に導くと、接線の y 切片だけを追えばよい問題になる。楕円と双曲線の接線公式を使う場合も、点を代入した式から $x = 0$ を置いて切片を出す過程を省かない方がよい。最後は $s = \sin \theta$ に対する $1/s + 2s$ の最小化で、等号条件 $s = 1/\sqrt{2}$ が範囲内にあることも確認する。

【第3問】

l, m, n を3以上の整数とする。等式 $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$ を満たす l, m, n の組をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

右辺が正で $l \geq 3$ なので、括弧内は正でなければならない。まずこの正条件から $n < 2m/(m-2)$ を得て、 $n \geq 3$ と合わせて m の候補を 3, 4, 5 に絞る。あとは各 m について可能な n を列挙し、 $l = 2/(\text{括弧内})$ が3以上の整数になるものだけを残す。

【解答】

与えられた等式は $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$ である。 $l \geq 3$ であり右辺は正なので、括弧内は正である。すなわち $\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 > 0$ である。これを整理すると $1 - n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) > 0$ であり、 $1 - \frac{n(m-2)}{2m} > 0$ となる。よって $n < \frac{2m}{m-2} = 2 + \frac{4}{m-2}$ である。 $n \geq 3$ だから $3 < 2 + \frac{4}{m-2}$ が必要である。したがって $1 < \frac{4}{m-2}$, $m-2 < 4$ より $m < 6$ である。 $m \geq 3$ なので $m = 3, 4, 5$ に限られる。

各場合を調べる。 $m = 3$ のとき、 $n < \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$ なので $n = 3, 4, 5$ である。括弧内は $\frac{n}{3} - \frac{n}{2} + 1 = 1 - \frac{n}{6} = \frac{6-n}{6}$ であるから $l = \frac{2}{(6-n)/6} = \frac{12}{6-n}$ となる。したがって $(n, l) = (3, 4), (4, 6), (5, 12)$ である。 $m = 4$ のとき、 $n < \frac{8}{2} = 4$ だから $n = 3$ のみである。このとき括弧内は $\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}$ なので $l = 8$ である。 $m = 5$ のとき、 $n < \frac{10}{3}$ だから $n = 3$ のみである。このとき括弧内は $\frac{3}{5} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{10}$ なので $l = 20$ である。

以上より求める組は $(l, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (12, 3, 5), (8, 4, 3), (20, 5, 3)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$d = m - 2$ とおき、括弧内の分子を $4 - (n - 2)d$ と表す。これが正の整数なので $(n - 2)d \leq 3$ となり、候補を直ちに列挙できる。

【解答】

与式を通分すると

$$\left\{ \frac{2m - n(m - 2)}{2m} \right\} l = 2.$$

$d = m - 2$ とおけば $d \geq 1$ 、 $m = d + 2$ であり

$$2m - n(m - 2) = 4 - (n - 2)d.$$

右辺が正でなければならないから

$$1 \leq 4 - (n - 2)d, \quad (n - 2)d \leq 3.$$

$n - 2, d$ はともに正の整数なので、可能な $(d, n - 2)$ は

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$$

だけである。

各場合に

$$l = \frac{4m}{4 - (n - 2)d}$$

を計算すると、順に

$$(l, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (12, 3, 5), (8, 4, 3), (20, 5, 3)$$

を得る。いずれも 3 以上の整数であり、もとの式を満たす。

【総評】 目安時間は 15 分前後。まず括弧内が正であることから m の候補を絞るのが本問の決め手である。 $n < 2m/(m - 2)$ と $n \geq 3$ を組み合わせると $m = 3, 4, 5$ だけになり、あとは小さな場合分けで終わる。候補を出した後、 l が整数であることまで確認してから列挙するのを忘れない。

■ 【第 4 問】 ■

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

動く球 S の中心 X が満たす条件に置き換える。 S が半径 3 の球 T_1 の内部にある条件は中心間距離 ≤ 2 、半径 1 の球 T_2 の外部にある条件は中心間距離 ≥ 2 である。したがって、求める立体は半径 2 の球から、中心距離 2 の同じ半径 2 の球との共通部分を除いたものになる。主解では球冠の体積で重なりを引き、別解では軸方向の断面積を積分する。

【解答】

半径 3 の球 T_1 の中心を O_1 、半径 1 の球 T_2 の中心を O_2 とする。 T_1 と T_2 は内接しているので $O_1O_2 = 3 - 1 = 2$ である。

半径 1 の球 S の中心を X とする。条件 (A) より、 S が T_1 の内部にあるか内接するためには $O_1X \leq 3 - 1 = 2$ であることが必要十分である。

また条件 (B) より、 S が T_2 の外部にあるか外接するためには $O_2X \geq 1 + 1 = 2$ であることが必要十分である。

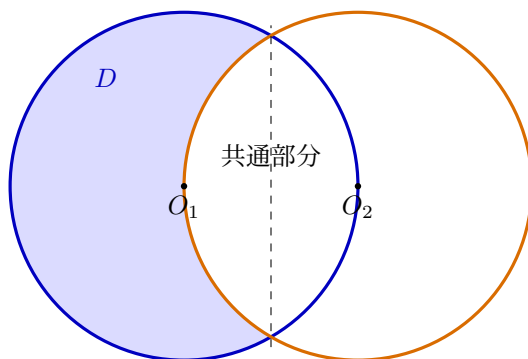
したがって D は、中心 O_1 、半径 2 の球のうち、中心 O_2 、半径 2 の球の内部を除いた部分である。ただし境界は体積に影響しない。

半径 2 の 2 つの球の中心間距離は 2 である。共通部分は、2 つの合同な球冠からなる。2 つの中心のちょうど中間の平面が共通部分を二等分し、各球における球冠の高さは $2 - \frac{2}{2} = 1$ である。

半径 R , 高さ h の球冠の体積は $\frac{\pi h^2(3R - h)}{3}$ である。ここでは $R = 2, h = 1$ だから、1 つの球冠の体積は $\frac{\pi \cdot 1^2(3 \cdot 2 - 1)}{3} = \frac{5\pi}{3}$ である。よって 2 球の共通部分の体積は $2 \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ である。

中心 O_1 , 半径 2 の球の体積は $\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$ だから、求める体積は $\frac{32\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = \frac{22\pi}{3}$ である。

【中心が動ける領域の断面】



半径 2 の青い球から、中心距離 2 の橙の球との共通部分を除く。

▶ 解法 2

【方針】

2 球の中心を x 軸上に置き、各 x における断面を円板または円環として表す。断面の形が変わる $x = 0, 1$ で積分区間を分ける。

【解答】

O_1 を原点、 O_2 を x 軸上の点 $(2, 0, 0)$ に置く。 $X = (x, y, z)$ とし、 $r^2 = y^2 + z^2$ とおくと、条件は $x^2 + r^2 \leq 4$, $(x - 2)^2 + r^2 \geq 4$ である。 $-2 \leq x \leq 0$ では第 2 条件は自動的に満たされるので、断面積は $\pi(4 - x^2)$ である。 $0 \leq x \leq 1$ では外側の円板から内側の円板を除くので、断面積は $\pi\{(4 - x^2) - [4 - (x - 2)^2]\} = 4\pi(1 - x)$ である。 $1 < x \leq 2$ では第 2 条件を満たす点はない。

したがって体積は

$$\int_{-2}^0 \pi(4 - x^2) dx + \int_0^1 4\pi(1 - x) dx$$

であり、

$$\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 + 4\pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{16\pi}{3} + 2\pi = \frac{22\pi}{3}$$

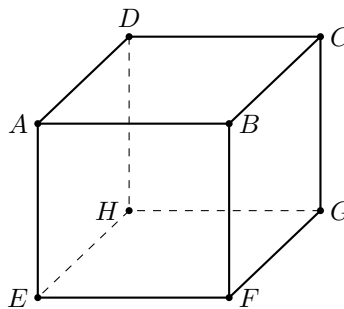
となる。

【総評】 目安時間は 20 分前後。動く球の中心範囲へ変換すると、半径 2 の球から同じ半径 2 の球との重なりを除く問題になる。採点上は、条件 (A) で $O_1X \leq 2$, 条件 (B) で $O_2X \geq 2$ になる理由と、2 球の中心間距離が 2 であることを明確にするのが重要である。球冠公式を使う場合は高さが 1 であること、積分で解く場合は $x = 0, 1$ で断面の形が変わることに注意したい。

【第 5 問】

n を 0 以上の整数とする. 立方体 $ABCD-EFGH$ の頂点を, 以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える. 時刻 0 には P は頂点 A に位置し, Q は頂点 C に位置している. 時刻 n において, P と Q が異なる頂点に位置していれば, 時刻 $n+1$ には, P は時刻 n に位置していた頂点から, それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り, Q も時刻 n に位置していた頂点から, それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る. 一方, 時刻 n において, P と Q が同じ頂点に位置していれば, 時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない.

- (1) 時刻 1 において, P と Q が異なる頂点に位置するとき, P と Q はどの頂点にあるか. 可能な組み合わせをすべて挙げよ.
- (2) 時刻 n において, P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ.
- (3) 時刻 n において, P と Q がともに上面 $ABCD$ の異なる頂点に位置するか, またはともに下面 $EFGH$ の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする. また, 時刻 n において, P と Q のいずれか一方が上面 $ABCD$, 他方が下面 $EFGH$ にある確率を q_n とする. p_{n+1} を, p_n と q_n を用いて表せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$ を求めよ.



▶ 解法 1

【方針】

2 点が異なる頂点にいる間だけ動くので, まず「異なる状態」が次に同じ頂点へ吸収される確率を数える. 初期状態 (A, C) は同じ面の対角線上にあり, 異なるまま推移した場合も常にどこかの面の対角線上にあるため, 共通の隣接頂点が 2 個であることを使える. (3) 以降は, 同じ上下面にいる状態 p と, 上面・下面に分かれる状態 q に分類し, 代表例を 1 つずつ使って 9 通りの移動を数える. 最後は $t_n = q_n/p_n$ の漸化式を作って極限を求める.

【解答】

(1) 時刻 0 で P は A , Q は C にある. 上面を $ABCD$, 下面を $EFGH$ とし, それぞれ対応する頂点が

$$A \leftrightarrow E, \quad B \leftrightarrow F, \quad C \leftrightarrow G, \quad D \leftrightarrow H$$

であるとする. A に隣接する頂点は B, D, E であり, C に隣接する頂点は B, D, G である. したがって時刻 1 で可能な (P, Q) の組は 9 通りある. そのうち同じ頂点になるのは $(B, B), (D, D)$ である.

よって, 時刻 1 において P と Q が異なる頂点に位置するとき, 可能な組は $(B, D), (B, G), (D, B), (D, G), (E, B), (E, D), (E, G)$ である.

(2) P, Q が異なる頂点にあるとき, 初期状態から到達しうる異なる状態は, つねに立方体のある面の対角線の両端である. 実際, (1) で列挙した 7 通りはいずれもどこかの面の対角線であり, 同じ性質は以後も保たれる.

面の対角線の両端にある 2 頂点は, 隣接頂点を 2 つ共有する. したがって, 次の時刻に 2 点が同じ頂点へ移る移動は 2 通りである. 一方, 2 点はそれぞれ 3 通りの隣接頂点へ移るので, 全体は $3 \cdot 3 = 9$ 通りである. よって, 異なる頂点にいたものが次も異なる頂点にいる確率は $\frac{9-2}{9} = \frac{7}{9}$ である. 同じ頂点になった後は動かないので, r_n について $r_{n+1} = \frac{7}{9}r_n$ が成り立つ. $r_0 = 1$ だから $r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$ である.

(3) p_n は 2 点が同じ水平面上の異なる頂点にある確率, q_n は一方が上面, 他方が下面にある確率である.

まず, p_n 型の代表として $(P, Q) = (A, C)$ を考える. P は B, D, E へ, Q は B, D, G へ移る. 9 通りのうち, 同じ水平面上の異なる頂点になるのは $(B, D), (D, B), (E, G)$ の 3 通りである. また, 上面と下面に分かれるのは $(B, G), (D, G), (E, B), (E, D)$ の 4 通りである. 残り 2 通りは同じ頂点になる.

したがって p_n 型から p_{n+1} 型へ移る確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ である。

次に, q_n 型の代表として $(P, Q) = (B, G)$ を考える。 B に隣接する頂点は A, C, F であり, G に隣接する頂点は C, F, H である。 9 通りのうち, 同じ水平面上の異なる頂点になるのは $(A, C), (F, H)$ の 2 通りである。したがって q_n 型から p_{n+1} 型へ移る確率は $\frac{2}{9}$ である。

以上より $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n$ である。

(4) (3) と同じ数え上げから, p_n 型から q_{n+1} 型へ移る確率は $4/9$, q_n 型から q_{n+1} 型へ移る確率は $5/9$ である。よって $q_{n+1} = \frac{4}{9}p_n + \frac{5}{9}q_n$ である。 $p_n > 0$ なので $t_n = \frac{q_n}{p_n}$ とおく。(3) の式と上の式から

$$t_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \frac{4p_n + 5q_n}{3p_n + 2q_n} = \frac{4 + 5t_n}{3 + 2t_n}$$

である。

ここで $t_{n+1} - 2 = \frac{4 + 5t_n}{3 + 2t_n} - 2 = \frac{t_n - 2}{3 + 2t_n}$ である。 $t_n \geq 0$ だから分母は 3 以上であり, t_n は 2 に近づく。実際, $t_0 = 0$ であり,

$$|t_{n+1} - 2| = \frac{|t_n - 2|}{3 + 2t_n} \leq \frac{1}{3}|t_n - 2|$$

だから, $|t_n - 2| \leq 2/3^n \rightarrow 0$ である。

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = 2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は 9 通りの遷移を数える。(3) で p, q の 2 状態遷移行列を作り、(4) では固有値 $7/9, 1/9$ に対応する 2 方向へ初期状態を分解して比の極限を求める。

【解答】

(1) A の隣接頂点は B, D, E , C の隣接頂点は B, D, G である。同じ頂点になる $(B, B), (D, D)$ を除けば

$$(P, Q) = (B, D), (B, G), (D, B), (D, G), (E, B), (E, D), (E, G)$$

である。

(2) 異なるまま到達できる 2 頂点は常に同一面の対角点であり、共通の隣接頂点が 2 個ある。9 通りの移動中 7 通りで異なる状態が続くので

$$r_{n+1} = \frac{7}{9}r_n, \quad r_0 = 1.$$

よって

$$r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

(3) 同一の上面または下面にいる状態を p 型、上下に分かれた状態を q 型とする。9 通りを数えると

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

特に

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n.$$

(4) 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値は 7, 1 で、それぞれの固有方向は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。初期状態は $(p_0, q_0) = (1, 0)$ だから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n, \\ q_n &= \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

両式を $(7/9)^n$ で割れば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = 2$$

を得る。

【総評】 目安時間は 30 分以上。立方体上の 2 点移動を，面对角線上にある状態として捉えることが入口である。(3) では代表状態 (A, C) と (B, G) の 9 通りを実際に数え， q_n 型から p_{n+1} 型へ移る確率が $2/9$ であることを正しく押さえる必要がある。ここを $4/9$ とすると (4) の極限も崩れる。最後は比 $t_n = q_n/p_n$ の漸化式に直し， $t_{n+1} - 2 = (t_n - 2)/(3 + 2t_n)$ として収束先を示すのが整理しやすい。