

大阪大学 2011 年度 文系

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数の組 (x, y, z) で、どのような整数 l, m, n に対しても、等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

【方針】

任意の整数 l, m, n に対して等式が成り立つので、これは l, m, n に関する恒等式として扱う。まず m の係数から $10^{x-z} = 36$ 、 n の係数から $y = -x$ を得る。残る l の係数にこの 2 条件を代入し、 $X = 10^{2x}$ とおけば $X + 36/X = 13$ という 2 次方程式に帰着する。最後に $X > 0$ と $z = x - \log_{10} 36$ を使って (x, y, z) を戻す。

【解答】

与えられた等式を $l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$ と見る。これはどのような整数 l, m, n に対しても成り立つので、 l, m, n の係数をそれぞれ比較できる。

まず m の係数を比較すると $10^{x-z} = 36$ である。次に n の係数を比較すると、左辺の n の係数は $-x$ 、右辺の n の係数は y であるから $-x = y$ である。さらに l の係数から $10^{x-y} + 10^{y-z} = 13$ を得る。

ここで $y = -x$ より $10^{x-y} = 10^{2x}$ である。また $10^{x-z} = 36$ と $y = -x$ を用いると $y - z = -x - z = (x - z) - 2x$ であるから $10^{y-z} = 10^{x-z} 10^{-2x} = \frac{36}{10^{2x}}$ となる。

そこで $X = 10^{2x}$ とおく。 $X > 0$ であり、 l の係数の条件は $X + \frac{36}{X} = 13$ となる。両辺に X をかけて $X^2 - 13X + 36 = 0$ である。因数分解すると $(X - 4)(X - 9) = 0$ だから $X = 4, 9$ である。 $X = 4$ のとき、 $10^{2x} = 4$ より $x = \log_{10} 2$ 、 $y = -\log_{10} 2$ である。また $10^{x-z} = 36$ より $z = x - \log_{10} 36 = \log_{10} 2 - \log_{10} 36 = \log_{10} \frac{1}{18}$ である。 $X = 9$ のとき、同様に $x = \log_{10} 3$ 、 $y = -\log_{10} 3$ であり、 $z = x - \log_{10} 36 = \log_{10} 3 - \log_{10} 36 = \log_{10} \frac{1}{12}$ である。

以上より求める組は

$$\left(\log_{10} 2, -\log_{10} 2, \log_{10} \frac{1}{18} \right), \left(\log_{10} 3, -\log_{10} 3, \log_{10} \frac{1}{12} \right)$$

である。

【総評】 任意の整数 l, m, n に対して成り立つという条件を、係数比較の問題として読めるかが核心である。 l, m, n は独立に動かせるため、3つの係数条件を別々に立ててよい。 $10^{x-z} = 36$ と $y = -x$ を先に使うと、指数部分は $X + 36/X = 13$ にまとまる。目安時間は 12 分程度で、符号、特に n の係数 $-x = y$ の処理に注意したい。

【第 2 問】

実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 (p_1, q_1) , (p_2, q_2) に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4 点 $P_0(0, 1)$, $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

【方針】

(1) は接点の x 座標を t とおき, 接する条件を $f'(t) = 1$, 通る条件を $f(t) = t$ として処理する. さらに $(0, 1)$ を通る条件で p, q を決め, 接点が $x > 0$ 側にあるものだけを残す. (2) は $f_1 - f_2$ で 2 次の項が消えて一次式になることを使い, 端点で負なら区間内でも負であることを示す. (3) は折れ線 L を避ける放物線を, $y = x$ の上側にある場合と下側にある場合に分ける. 長方形 R に現れるのは上側の場合だけで, 縦線分と斜め線分を避けるための q の下限を固定した p ごとに求める. 最後に固定した x で到達できる最小の y を最小化し, S の境界と面積を出す.

【解答】

(1)

接点の x 座標を t とする. 放物線 $f(x) = (x - p)^2 + q$ の導関数は $f'(x) = 2(x - p)$ である. 直線 $y = x$ と接するので, 接点での傾きが 1 に等しい. したがって $2(t - p) = 1$ であり, $t = p + \frac{1}{2}$ である. また接点は直線 $y = x$ 上にあるから $f(t) = t$ である. すなわち $(t - p)^2 + q = t$ であり, $t - p = 1/2$ を用いると $\frac{1}{4} + q = p + \frac{1}{2}$ だから $q = p + \frac{1}{4}$ である.

さらに放物線は点 $(0, 1)$ を通るので $f(0) = p^2 + q = 1$ である. ここに $q = p + 1/4$ を代入して $p^2 + p + \frac{1}{4} = 1$ すなわち $p^2 + p - \frac{3}{4} = 0$ を得る. よって $(2p - 1)(2p + 3) = 0$ であり, $p = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ である.

それぞれの接点の x 座標は $t = p + 1/2$ だから, $p = 1/2$ のとき $t = 1$, $p = -3/2$ のとき $t = -1$ である. 条件は直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接することであるから, $t > 0$ となる $p = 1/2$ だけが適する. このとき $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ であり, 接点は $(t, t) = (1, 1)$ である. したがって $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, 接点 $(1, 1)$ である.

(2)

差をとると $f_1(x) - f_2(x) = \{(x - p_1)^2 + q_1\} - \{(x - p_2)^2 + q_2\}$ である. 展開すると x^2 の項が消え, $f_1(x) - f_2(x) = 2(p_2 - p_1)x + (p_1^2 - p_2^2 + q_1 - q_2)$ となる. したがって $f_1(x) - f_2(x)$ は x の一次式である.

一次式を $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ とおく. 仮定より $g(\alpha) < 0$, $g(\beta) < 0$ である. $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき, ある $0 \leq \lambda \leq 1$ を用いて $x = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$ と表せる. 一次式の性質から $g(x) = (1 - \lambda)g(\alpha) + \lambda g(\beta)$ である. 右辺は負の数の和であるから $g(x) < 0$ である. よって $f_1(x) < f_2(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) が成り立つ.

(3)

折れ線 L は, 縦線分 $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ と, 斜め線分 $y = x, 0 \leq x \leq 1$ と, 縦線分 $x = 1, 0 \leq y \leq 1$ からなる.

放物線 $y = f(x)$ が斜め線分 $y = x$ と共有点をもたないなら, $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) - x$ は 0 にならない. したがってこの区間で $f(x) > x$ が常に成り立つか, または $f(x) < x$ が常に成り立つかのどちらかである.

まず $f(x) < x$ が常に成り立つ場合を考える. 縦線分を避けるためには, $x = 0$ で $f(0)$ が $[0, 1]$ に入ってはならない. しかも $f(0) < 0$ である. 同様に $x = 1$ でも $f(1) < 1$ であり, 縦線分を避けるためには $f(1) < 0$ でなければならない. 放物線 $f(x)$ は下に凸なので, $0 \leq x \leq 1$ では両端の値を結ぶ線分以下にあり, 特に $f(x) < 0$ となる. したがってこの場合, 長方形 R の内部の点 (x, y) で $0 \leq y \leq 2$ を通過しない.

よって R に現れる放物線は $f(x) > x$ ($0 \leq x \leq 1$) を満たすものだけである. このとき縦線分を避ける条件は $f(0) > 1$, $f(1) > 1$ である.

固定した p について, これらの条件を q の条件に直す. まず $f(0) = p^2 + q > 1$ より $q > 1 - p^2$ であり, $f(1) = (1 - p)^2 + q > 1$ より $q > 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$ である. また $f(x) > x$ が $0 \leq x \leq 1$ で成り立つためには $(x - p)^2 + q > x$ すなわち

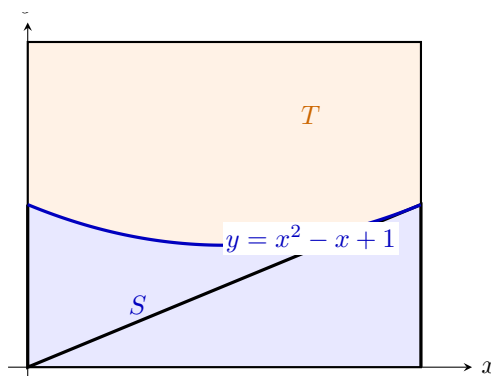
$q > x - (x - p)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) が必要である。

右辺 $x - (x - p)^2$ の最大値も考慮すると、結局 q は $1 - p^2$, $2p - p^2$, $\max_{0 \leq x \leq 1} \{x - (x - p)^2\}$ より大きくなければならない。この 3 つの最大を調べると、 $p \leq 1/2$ では $q > 1 - p^2$ が下限を与え、 $p \geq 1/2$ では $q > 2p - p^2$ が下限を与える。実際、 $p \leq 1/2$ では $1 - p^2 \geq 2p - p^2$ であり、斜め線分から来る最大値も $1 - p^2$ 以下である。 $p \geq 1/2$ では $2p - p^2 \geq 1 - p^2$ で、斜め線分から来る最大値も $2p - p^2$ 以下である。

したがって、固定した x に対して放物線が到達できる y の下限を求める。 $p \leq 1/2$ の側では $y = (x - p)^2 + q$ の下限は $(x - p)^2 + 1 - p^2 = x^2 - 2px + 1$ である。 $0 \leq x \leq 1$ では、これは p が大きいほど小さいので、 $p = 1/2$ で最小となる。

一方、 $p \geq 1/2$ の側では下限は $(x - p)^2 + 2p - p^2 = x^2 + 2p(1 - x)$ である。 $0 \leq x \leq 1$ では、これは p が小さいほど小さいので、やはり $p = 1/2$ で最小となる。

よって固定した x で到達できる最小境界は $y = x^2 - x + 1$ である。したがって、長方形 R の中で放物線が通過できる点全体 T は、この曲線より上側に現れる。したがって R から T を除いた領域 S は、面積の計算上 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2 - x + 1$ で表される領域である。



折れ線 L を避ける放物線の限界が、領域 S の上端を与える。

よってその面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

である。境界曲線 $y = x^2 - x + 1$ は、(1) で得た $p = 1/2, q = 3/4$ の放物線であり、折れ線に接する限界の放物線になっている。

【総評】 (1)(2) は (3) の準備になっており、特に (2) は「端点で上下関係が決まれば区間全体で保たれる」という判定として使う。最難所は (3) で、折れ線を避ける条件を縦線分 2 本と斜め線分 1 本に分解して、 q の下限を正確に取ることにある。下側にある放物線は長方形内に現れないため、上側の場合だけを追えばよい。境界 $y = x^2 - x + 1$ が (1) の接する放物線になることに気づくと、図示の意味も確認しやすい。目安時間は 35 分程度。

【第 3 問】

a, b, c を実数とする. ベクトル $\vec{v}_1 = (3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり, $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく. 座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える. ここで $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$ ($i = 1, 2, 3$) はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が, 実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ.
- (2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 (*) をみたすならば, 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 (*) をみたすことを示せ.
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 (*) をみたす. このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

【方針】

(1) で $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が平面の基底になっていることを, 係数 s, t を実際に解いて示す. (2) は条件 (*) の左辺が $\vec{p}$ に関して一次的であることを使い, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ で成り立てばその一次結合でも成り立つと示す. (3) は標準座標で左辺を成分表示し, すべての $\vec{p} = (X, Y)$ について $c\vec{p}$ に等しくなるための係数条件を立てる. 対角成分が等しく, 非対角成分が 0 になる条件を $u = 3a + b$ とおいて解く.

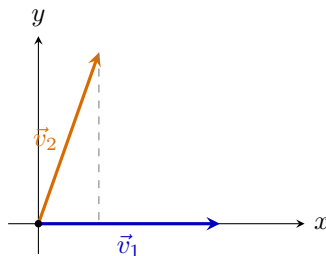
【解答】

(1) $\vec{v}_1 = (3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ であるから, 実数 s, t に対して $s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = (3s + t, 2\sqrt{2}t)$ である. これが任意の $\vec{v} = (x, y)$ に等しくなるためには $2\sqrt{2}t = y$ より $t = \frac{y}{2\sqrt{2}}$ であり, さらに $3s + t = x$ より $s = \frac{x - t}{3} = \frac{x}{3} - \frac{y}{6\sqrt{2}}$ である.

したがって任意の $\vec{v} = (x, y)$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{6\sqrt{2}} \right) \vec{v}_1 + \frac{y}{2\sqrt{2}} \vec{v}_2$$

と表される.



$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は平行でないため, 平面の基底になる.

(2)

条件 (*) の左辺を

$$F(\vec{p}) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3$$

とおく. 内積は $\vec{p}$ について一次的であるから, $F(\vec{p})$ も $\vec{p}$ について一次的である. すなわち任意の実数 s, t に対して $F(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) = sF(\vec{v}_1) + tF(\vec{v}_2)$ である.

仮定より $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ は条件 (*) を満たすので $F(\vec{v}_1) = c\vec{v}_1$, $F(\vec{v}_2) = c\vec{v}_2$ である. したがって $F(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) = sc\vec{v}_1 + tc\vec{v}_2 = c(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2)$ である. (1) より任意の座標平面上のベクトルは $s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されるので, すべての $\vec{p}$ が条件 (*) を満たす.

(3) $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ より $\vec{v}_3 = (3a + b, 2\sqrt{2}b)$ である. ここで $u = 3a + b$ とおくと $\vec{v}_3 = (u, 2\sqrt{2}b)$ である.

任意の $\vec{p} = (X, Y)$ に対して左辺を成分で計算する. まず $(\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 = 3X(3, 0) = (9X, 0)$ であり,

$$(\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 = (X + 2\sqrt{2}Y)(1, 2\sqrt{2}) = (X + 2\sqrt{2}Y, 2\sqrt{2}X + 8Y)$$

である. また $(\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = (uX + 2\sqrt{2}bY)(u, 2\sqrt{2}b)$ だから, これは $(u^2X + 2\sqrt{2}buY, 2\sqrt{2}buX + 8b^2Y)$ である.

したがって左辺全体は $((10+u^2)X+2\sqrt{2}(1+bu)Y, 2\sqrt{2}(1+bu)X+(8+8b^2)Y)$ である。これがすべての (X, Y) について $c(X, Y)$ に等しいためには、 X, Y の係数を比較して $1+bu=0$ かつ $10+u^2=c$, $8+8b^2=c$ であることが必要十分である。よって $bu=-1$, $u^2-8b^2=-2$ である。 $bu=-1$ より $b \neq 0$ で、 $u=-1/b$ である。これを $u^2-8b^2=-2$ に代入すると $\frac{1}{b^2}-8b^2=-2$ である。 $B=b^2$ とおくと $1-8B^2=-2B$ すなわち $8B^2-2B-1=0$ である。因数分解して $(2B-1)(4B+1)=0$ となる。 $B=b^2>0$ だから $b^2=\frac{1}{2}$ である。 $b=1/\sqrt{2}$ のとき、 $u=-\sqrt{2}$ である。 $u=3a+b$ なので $3a=-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ より $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。 $b=-1/\sqrt{2}$ のとき、 $u=\sqrt{2}$ である。したがって $3a=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ より $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。どちらの場合も $c=8+8b^2=8+4=12$ である。

以上より

$$(a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 12\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 12\right)$$

である。

【総評】 内積で定まる一次変換を、基底と成分比較で扱う問題である。(1) で $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が平面全体を張ることを具体的に示すため、(2) では線形性だけで全ベクトルへ拡張できる。(3) は計算問題に見えるが、左辺が $c\vec{p}$ になるには非対角成分が 0、2 つの対角成分が同じ、という構造を意識すると整理しやすい。目安時間は 25 分程度で、 $u=3a+b$ と置いて式を短くするのが有効である。