

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2011 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面上に原点 O を中心とする半径 5 の円 C がある。 $n = 2$ または $n = 3$ とし、半径 n の円 C_n が円 C に内接して滑ることなく回転していくとする。円 C_n 上に点 P_n がある。最初、円 C_n の中心 O_n が $(5 - n, 0)$ に、点 P_n が $(5, 0)$ にあったとして、円 C_n の中心が円 C の内部を反時計回りに n 周して、もとの位置に戻るものとする。円 C と円 C_n の接点を S_n とし、線分 OS_n が x 軸の正の方向となす角を t とする。

- (1) 点 P_n の座標を t と n を用いて表せ。
- (2) 点 P_2 の描く曲線と点 P_3 の描く曲線は同じであることを示せ。

第 2 問

$m = 2$ または $m = 3$ とする。 n を自然数とし、 1 以上 n 以下の整数値をとる m 項の数列 $\{a_1, \dots, a_m\}$ のうち、 $1 \leq k \leq m-1$ に対して $2a_k \leq a_{k+1}$ を満たすものの個数を $S_m(n)$ とする。

- (1) $S_2(n)$ を求めよ。
- (2) $S_3(2n+1) - S_3(2n) = S_2(j)$ を満たす自然数 j を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_3(n)}{n^3}$ を求めよ。

第 3 問

x, y は $-\pi/2 < x < \pi/2$ 、 $-\pi/2 < y < \pi/2$ の範囲にある 0 でない実数で、

$$\sin^3 x + \sin^3 y = \frac{3\sqrt{15}}{32}, \quad \frac{\sin y}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin y} = 3$$

を満たすとする。このとき、 $x + y$ の値を求めよ。

第 4 問

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。点 $A(-2, 0)$ を通る直線が $y > 0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする。自然数 $n \geq 2$ に対して点 A を通る $(n - 1)$ 本の直線で $\angle OAP$ を n 等分する。これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1, \dots, l_{n-1}$ とし、直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k 、他方を R_k とする。

(1) $AR_k^2 - AQ_k^2$ を n と k を用いて表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (AR_k^2 - AQ_k^2)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)