

大阪大学 2011 年度 理系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上に原点 O を中心とする半径 5 の円 C がある。 $n = 2$ または $n = 3$ とし、半径 n の円 C_n が円 C に内接して滑ることなく回転していくとする。円 C_n 上に点 P_n がある。最初、円 C_n の中心 O_n が $(5 - n, 0)$ に、点 P_n が $(5, 0)$ にあったとして、円 C_n の中心が円 C の内部を反時計回りに n 周して、もとの位置に戻るものとする。円 C と円 C_n の接点を S_n とし、線分 OS_n が x 軸の正の方向となす角を t とする。

- (1) 点 P_n の座標を t と n を用いて表せ。
- (2) 点 P_2 の描く曲線と点 P_3 の描く曲線は同じであることを示せ。

【方針】

中心 O_n は半径 $5 - n$ の円上を動く。滑らない条件から、中心が角 t だけ公転したとき、小円は中心のまわりに時計回りへ $(5 - n)t/n$ だけ回転する。中心の位置ベクトルと $\overrightarrow{O_n P_n}$ を足して座標を得る。(2) では $n = 2$ は $t = 2u$ 、 $n = 3$ は $t = -3u$ と置き、どちらも $0 \leq u \leq 2\pi$ を一巡すると同じ座標集合になることを示す。

【解答】

(1) 円 C_n の中心は

$$O_n = ((5 - n) \cos t, (5 - n) \sin t)$$

である。中心が角 t だけ動く間に接点が円 C 上を進む弧の長さは $(5 - n)t$ である。滑らないので、円 C_n は中心のまわりに時計回りへ

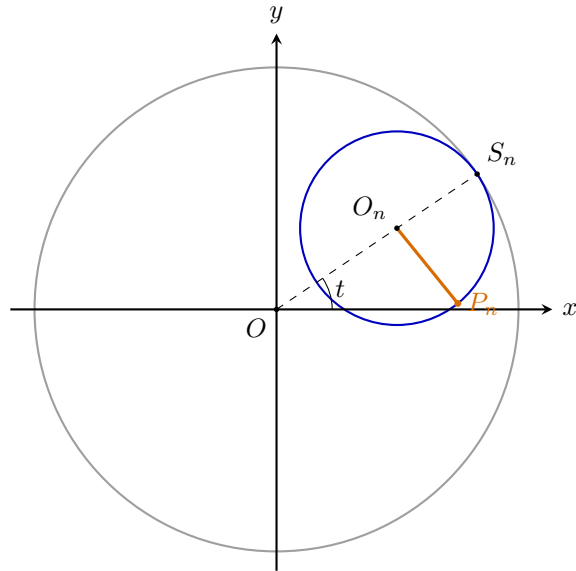
$$\frac{(5 - n)t}{n}$$

だけ回転する。初めに $\overrightarrow{O_n P_n} = (n, 0)$ であったから

$$\overrightarrow{O_n P_n} = \left(n \cos \frac{(5 - n)t}{n}, -n \sin \frac{(5 - n)t}{n} \right).$$

したがって

$$P_n = \left((5 - n) \cos t + n \cos \frac{(5 - n)t}{n}, (5 - n) \sin t - n \sin \frac{(5 - n)t}{n} \right).$$



中心は半径 $5 - n$ の円を公転し、小円は反対向きに自転する。

(2) $n = 2$ のとき、中心は 2 周するので $0 \leq t \leq 4\pi$ である。 $t = 2u$ とおけば $0 \leq u \leq 2\pi$ であり、(1) から

$$P_2 = (3 \cos 2u + 2 \cos 3u, 3 \sin 2u - 2 \sin 3u).$$

一方、 $n = 3$ のときは中心が 3 周するので、 t は長さ 6π の範囲を動く。(1) で $t = -3u$ と置くと

$$P_3 = (2 \cos 3u + 3 \cos 2u, -2 \sin 3u + 3 \sin 2u).$$

これは P_2 の座標と一致する。 u が長さ 2π の区間を動くとき $-3u$ は中心の 3 周分を逆向きに一巡し、描かれる点の集合は向きによらない。よって P_2 と P_3 の描く曲線は同じである。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 22 分程度。滑らない条件を角度ではなく弧長で立て、内側を転がるため自転の向きが公転と逆になることを明示するのが第一の採点点である。(2) は 2 つの式を力任せに消去せず、公転角をそれぞれ 2 倍・3 倍の媒介変数に置き直すと同じ三角関数の組が現れる。曲線が同じとは通過方向まで同じという意味ではなく、点の集合が一致することなので、負の媒介変数を使っても問題ないことを一言添えると答案が明確になる。

【第 2 問】

$m = 2$ または $m = 3$ とする。 n を自然数とし、1 以上 n 以下の整数値をとる m 項の数列 $\{a_1, \dots, a_m\}$ のうち、 $1 \leq k \leq m - 1$ に対して $2a_k \leq a_{k+1}$ を満たすものの個数を $S_m(n)$ とする。

- (1) $S_2(n)$ を求めよ。
- (2) $S_3(2n + 1) - S_3(2n) = S_2(j)$ を満たす自然数 j を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_3(n)}{n^3}$ を求めよ。

【方針】

(1) は a_1 を固定し、 a_2 の選択数を和にする。(2) は上限を $2n$ から $2n + 1$ に増やして新たに加わる 3 項列を調べる。条件のため新しい値は第 3 項にしか現れず、残る 2 項が $S_2(n)$ そのものになる。(3) は一般に $S_3(N) - S_3(N - 1) = S_2(q_N)$ と表し、(1) の評価で平方和との間に挟んで極限を求める。

【解答】

(1) $a_1 = q$ と固定する。条件 $2a_1 \leq a_2 \leq n$ を満たす a_2 は $n - 2q + 1$ 個であり、 $1 \leq q \leq d$ である。ただし、 d は $n/2$ 以下の最大の整数とする。すると

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{q=1}^d (n - 2q + 1) \\ &= d(n + 1) - d(d + 1) \\ &= d(n - d). \end{aligned}$$

したがって

$$S_2(n) = \begin{cases} q^2 & (n = 2q), \\ q(q+1) & (n = 2q+1) \end{cases}$$

である。

(2) 上限を $2n$ から $2n+1$ に変えて新たに加わる 3 項列を考える。 $2a_1 \leq a_2 \leq 2n+1$ かつ $2a_2 \leq a_3 \leq 2n+1$ だから、値 $2n+1$ が現れるとすれば a_3 だけである。よって新たな列では $a_3 = 2n+1$ であり、 $a_2 \leq n$ となる。

したがって (a_1, a_2) は、各項が 1 以上 n 以下で $2a_1 \leq a_2$ を満たす 2 項列である。その個数は $S_2(n)$ だから

$$S_3(2n+1) - S_3(2n) = S_2(n).$$

よって $j = n$ である。(1) の式から $S_2(q)$ は自然数 q について狭義単調増加するので、この j は一意である。

(3) $N \geq 2$ とする。上限を $N-1$ から N に増やして新たに加わる列では $a_3 = N$ である。 $N/2$ 以下の最大の整数を q_N とおくと、残る条件は $2a_1 \leq a_2 \leq q_N$ だから

$$S_3(N) - S_3(N-1) = S_2(q_N).$$

(1) より

$$\frac{q_N^2 - 1}{4} \leq S_2(q_N) \leq \frac{q_N^2}{4}.$$

また $N/2 - 1 < q_N \leq N/2$ だから

$$\frac{N^2}{16} - \frac{N}{4} \leq S_2(q_N) \leq \frac{N^2}{16}.$$

$S_3(1) = 0$ であるから、これを $N = 2, 3, \dots, n$ について加えると

$$\frac{1}{16} \sum_{N=2}^n N^2 - \frac{1}{4} \sum_{N=2}^n N \leq S_3(n) \leq \frac{1}{16} \sum_{N=2}^n N^2.$$

各辺を n^3 で割る。 $\sum_{N=2}^n N^2/n^3 \rightarrow 1/3$ 、 $\sum_{N=2}^n N/n^3 \rightarrow 0$ だから、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_3(n)}{n^3} = \frac{1}{48}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 24 分程度。(1) の偶奇表示だけで終わらず、偶数・奇数それぞれの閉じた式まで整理しておく後半で使いやすい。(2) では上限の増加による差を「新たに第 3 項が最大値になる列」と解釈できるかが中心。(3) は 3 重和を直接計算する必要はなく、差分を S_2 に落として平方和で挟めばよい。整数部分による誤差は一次式以下なので、 n^3 で割ると消えることを不等式で示すのが採点上安全である。

【第 3 問】

x, y は $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\pi/2 < y < \pi/2$ の範囲にある 0 でない実数で、

$$\sin^3 x + \sin^3 y = \frac{3\sqrt{15}}{32}, \quad \frac{\sin y}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin y} = 3$$

を満たすとする。このとき、 $x+y$ の値を求めよ。

【方針】

$u = \sin x$, $v = \sin y$ と置き、比の式を $u^2 + v^2 = 3uv$ に直す。和 $u+v$ と積 uv を三乗和から求める。 x, y はともに $(-\pi/2, \pi/2)$ にあるため余弦は正であり、 $\cos x \cos y$ を正の平方根として計算できる。最後に $\cos(x+y)$ と $x+y$ の範囲から角を一意に決める。

【解答】

$u = \sin x$, $v = \sin y$ とおく。 $u, v \neq 0$ であり、2 つ目の等式から

$$u^2 + v^2 = 3uv$$

を得る。したがって $uv > 0$ である。 $s = u+v$ とおけば

$$s^2 = u^2 + 2uv + v^2 = 5uv$$

である。また

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= (u+v)^3 - 3uv(u+v) \\ &= s(s^2 - 3uv) \\ &= \frac{2}{5}s^3. \end{aligned}$$

問題の条件より

$$\frac{2}{5}s^3 = \frac{3\sqrt{15}}{32}$$

であるから

$$s^3 = \frac{15\sqrt{15}}{64} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3.$$

よって

$$u+v = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad uv = \frac{s^2}{5} = \frac{3}{16}.$$

特に $uv > 0$ かつ $u+v > 0$ なので $u, v > 0$ であり、 $0 < x, y < \pi/2$ である。

また

$$\begin{aligned} (1-u^2)(1-v^2) &= 1 - (u^2 + v^2) + u^2v^2 \\ &= 1 - 3uv + (uv)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{16} + \frac{9}{256} = \frac{121}{256}. \end{aligned}$$

$\cos x, \cos y > 0$ だから

$$\cos x \cos y = \frac{11}{16}.$$

したがって

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{11}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}.$$

ここで $0 < x+y < \pi$ であるから

$$x+y = \frac{\pi}{3}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 15 分程度。三角関数のまま加法定理を操作するより、 $u = \sin x, v = \sin y$ として対称式に落とすのが定石である。比の式から $u^2 + v^2 = 3uv$ 、さらに $(u+v)^2 = 5uv$ を得る流れが主な得点点。 $\cos x \cos y$ を平方根で求める際は、与えられた角の範囲から両方の余弦が正であることを書く必要がある。最後も $\cos(x+y) = 1/2$ だけで止めず、 $0 < x+y < \pi$ から解を一つに絞る。

【第 4 問】

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。点 $A(-2, 0)$ を通る直線が $y > 0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする。自然数 $n \geq 2$ に対して点 A を通る $(n-1)$ 本の直線で $\angle OAP$ を n 等分する。これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1, \dots, l_{n-1}$ とし、直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k 、他方を R_k とする。

(1) $AR_k^2 - AQ_k^2$ を n と k を用いて表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (AR_k^2 - AQ_k^2)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直角三角形 AOP から $\angle OAP = \pi/6$ を求め、 l_k の方向角を $\theta_k = k\pi/(6n)$ とする。点 A から l_k 上を距離 r だけ進んだ点を座標表示し、円との交点条件を r の二次方程式にする。2 根が AQ_k, AR_k なので、和と差から平方差を求める。(2) は θ_k に関する区分求積和へ直し、 $u = 2\sin \theta$ で積分する。

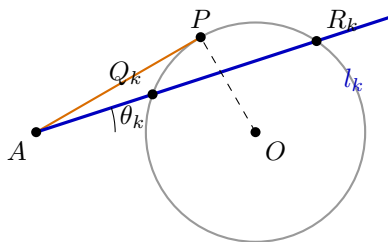
【解答】

(1) AP は円の接線なので $OP \perp AP$ である。 $AO = 2$ 、 $OP = 1$ より、直角三角形 AOP で

$$\sin \angle OAP = \frac{1}{2}$$

であるから $\angle OAP = \pi/6$ である。したがって l_k が AO となす角を θ_k とすると

$$\theta_k = \frac{k\pi}{6n}.$$



接線が作る角 $\pi/6$ を n 等分し、各割線の 2 交点を考える。

点 A から l_k に沿って距離 r だけ進んだ点の座標は

$$(-2 + r \cos \theta_k, r \sin \theta_k)$$

である。これが円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある条件は

$$r^2 - 4r \cos \theta_k + 3 = 0$$

である。その 2 根は AQ_k, AR_k であり

$$AQ_k + AR_k = 4 \cos \theta_k, \quad AR_k - AQ_k = 2\sqrt{4 \cos^2 \theta_k - 3}.$$

よって

$$\begin{aligned} AR_k^2 - AQ_k^2 &= (AR_k - AQ_k)(AR_k + AQ_k) \\ &= 8 \cos \theta_k \sqrt{4 \cos^2 \theta_k - 3} \\ &= 8 \cos \frac{k\pi}{6n} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{6n}}. \end{aligned}$$

(2) $h(\theta) = 8 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta}$ とおく。(1) より求める極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k\pi}{6n}\right) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/6} h(\theta) d\theta.$$

ここで $u = 2 \sin \theta$ とおくと $du = 2 \cos \theta d\theta$ であり、積分区間は $0 \leq u \leq 1$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} h(\theta) d\theta &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

最後の積分は半径 1 の円の第 1 象限部分の面積である。よって求める極限は

$$\frac{6}{\pi} \cdot \pi = 6$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

割線と円の交点を二次方程式で解かず、中心から弦へ下ろした垂線と弦の中点を用いて AQ_k, AR_k の和と差を幾何的に得る。後半は区分求積法と 4 分円の面積で極限を評価する。

【解答】

(1)

弦の中点と点の冪を用いる。

AP は円 C の接線で、 $AO = 2$, $OP = 1$ だから

$$\angle OAP = \frac{\pi}{6}.$$

したがって直線 l_k が AO となす角を

$$\theta_k = \frac{k\pi}{6n}$$

とおける。

l_k が円の内部に作る弦 $Q_k R_k$ の中点を M_k とする。円の中心から弦への垂線は弦を二等分するので $OM_k \perp l_k$ である。直角三角形 AOM_k から

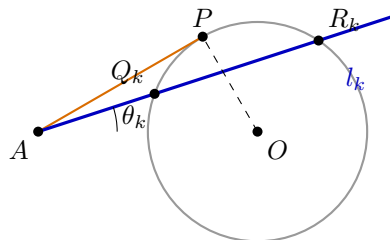
$$AM_k = AO \cos \theta_k = 2 \cos \theta_k, \quad OM_k = 2 \sin \theta_k$$

を得る。半径は 1 だから

$$M_k R_k = M_k Q_k = \sqrt{1 - OM_k^2} = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta_k}.$$

$AQ_k = AM_k - M_k Q_k$, $AR_k = AM_k + M_k R_k$ より

$$\begin{aligned} AR_k^2 - AQ_k^2 &= 4AM_k \cdot M_k R_k \\ &= 8 \cos \theta_k \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta_k} \\ &= 8 \cos \frac{k\pi}{6n} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{6n}}. \end{aligned}$$



接線が作る角 $\pi/6$ を n 等分し、各割線の 2 交点を考える。

(2)

$h(\theta) = 8 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta}$ とおくと、求める極限は区分求積法により

$$\frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/6} h(\theta) d\theta$$

である。 $u = 2 \sin \theta$ と置けば

$$\int_0^{\pi/6} h(\theta) d\theta = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = \pi.$$

よって求める極限は

$$\frac{6}{\pi} \cdot \pi = 6$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 22 分程度。接弦の図形を座標化し、交点までの距離そのものを二次方程式の根にする発想が中心である。 AQ_k, AR_k を個別に長く計算するより、根の和と差から平方差を作ると整理しやすい。(2) では刻み幅が $\pi/(6n)$ なので、問題の係数 $1/n$ から外に $6/\pi$ が出ることを明示する。置換後の

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$$

を 4 分円の面積と読むと計算ミスを防げる。