

## 大阪大学 2011 年度 理系

## 解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

## 【第 1 問】

$a$  を自然数とする.  $O$  を原点とする座標平面上で行列  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  の表す 1 次変換を  $f$  とする.

- (1)  $r > 0$  および  $0 \leq \theta < 2\pi$  を用いて  $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$  と表すとき,  $r, \cos \theta, \sin \theta$  を  $a$  で表せ.
- (2) 点  $Q(1, 0)$  に対し, 点  $Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $Q_1 = Q, Q_{n+1} = f(Q_n)$  で定める.  $\triangle OQ_n Q_{n+1}$  の面積  $S(n)$  を  $a$  と  $n$  を用いて表せ.
- (3)  $f$  によって点  $(2, 7)$  に移されるもとの点  $P$  の  $x$  座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという. 自然数  $a$  の値を求めよ. またこのとき  $S(n) > 10^{10}$  となる最小の  $n$  を求めよ. ただし  $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$  を用いてよい.

## 【方針】

(1) は行列を「原点中心の回転と拡大」と見て,  $r \cos \theta = a, r \sin \theta = 1$  を比較する. (2) は  $Q_n$  が毎回同じ角  $\theta$  だけ回転し、長さが毎回  $r$  倍されることを使い,  $\triangle OQ_n Q_{n+1}$  の面積を 2 辺とその間の角から求める. (3) は逆変換で元の点  $(X, Y)$  を求め,  $X$  が四捨五入で 2 になる範囲  $3/2 \leq X < 5/2$  から自然数  $a$  を決める. 最後は  $a = 2$  を代入した面積の不等式を, 5 の累乗で判定する.

## 【解答】

(1)

与えられた行列は

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

である. 一方、問題の形では

$$A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

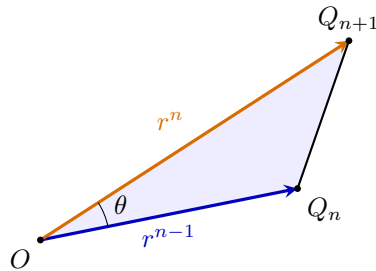
であるから、成分を比較して  $r \cos \theta = a, r \sin \theta = 1$  である. したがって  $r^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2 + 1$  であり,  $r > 0$  より  $r = \sqrt{a^2 + 1}$  である. よって

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

である.

(2)

行列  $A$  の表す変換は、原点を中心として角  $\theta$  だけ回転し、長さを  $r$  倍する変換である.  $Q_1 = Q = (1, 0)$  なので  $OQ_1 = 1$  であり,  $Q_n$  は  $Q$  を  $n - 1$  回移した点である. したがって  $OQ_n = r^{n-1}, OQ_{n+1} = r^n$  である. また  $Q_n$  から  $Q_{n+1}$  へは角  $\theta$  だけ回転するので,  $\angle Q_n OQ_{n+1} = \theta$  である.



回転角は  $\theta$ 、2 辺の長さは連続して  $r$  倍になる。

よって三角形の面積は

$$S(n) = \frac{1}{2} OQ_n \cdot OQ_{n+1} \sin \theta = \frac{1}{2} r^{n-1} r^n \sin \theta$$

である。(1) より  $r \sin \theta = 1$  だから  $S(n) = \frac{1}{2} r^{2n-2} = \frac{1}{2} (a^2 + 1)^{n-1}$  である。したがって  $S(n) = \frac{1}{2} (a^2 + 1)^{n-1}$  である。

(3)  $f$  によって点  $(2, 7)$  に移されるもとの点を  $P = (X, Y)$  とする。このとき

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

である。すなわち

$$\begin{cases} aX - Y = 2, \\ X + aY = 7 \end{cases}$$

である。第 1 式から  $Y = aX - 2$  として第 2 式に代入すると  $X + a(aX - 2) = 7$  だから  $(a^2 + 1)X = 2a + 7$  である。したがって  $X = \frac{2a+7}{a^2+1}$  である。

この  $X$  の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるための条件は  $\frac{3}{2} \leq X < \frac{5}{2}$  である。つまり  $\frac{3}{2} \leq \frac{2a+7}{a^2+1} < \frac{5}{2}$  である。

自然数  $a$  について調べる。 $a = 1$  では  $X = \frac{9}{2}$  であり不適。 $a = 2$  では  $X = \frac{11}{5} = 2.2$  であり適する。 $a \geq 3$  のときは  $\frac{2a+7}{a^2+1} < \frac{3}{2}$  を確認すればよい。これは  $2(2a+7) < 3(a^2+1)$  すなわち  $3a^2 - 4a - 11 > 0$  であり、 $a \geq 3$  で成り立つ。したがって  $a = 2$  である。

このとき  $S(n) = \frac{1}{2} (2^2 + 1)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 5^{n-1}$  である。求める条件は  $\frac{1}{2} \cdot 5^{n-1} > 10^{10}$  すなわち  $5^{n-1} > 2 \cdot 10^{10}$  である。

実際に  $5^{14} = 6103515625 < 2 \cdot 10^{10}$  であり、 $5^{15} = 30517578125 > 2 \cdot 10^{10}$  である。したがって最小の指数は  $n - 1 = 15$  であり、求める最小の  $n$  は 16 である。

【総評】 行列を回転拡大として読めるかを問う標準問題である。(2) の面積では、2 辺の長さが  $r^{n-1}$  と  $r^n$  になるため一見  $r^{2n-1}$  が出るが、 $\sin \theta = 1/r$  によって  $r^{2n-2}$  まで下がる。(3) では逆変換を解いて  $X = (2a+7)/(a^2+1)$  を出し、四捨五入の範囲を  $[3/2, 5/2)$  と正確に置くことが重要である。目安時間は 20 分程度。

【第 2 問】

実数  $\theta$  が動くとき,  $xy$  平面上の動点  $P(0, \sin \theta)$  および  $Q(8 \cos \theta, 0)$  を考える.  $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき, 平面内で線分  $PQ$  が通過する部分を  $D$  とする.  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

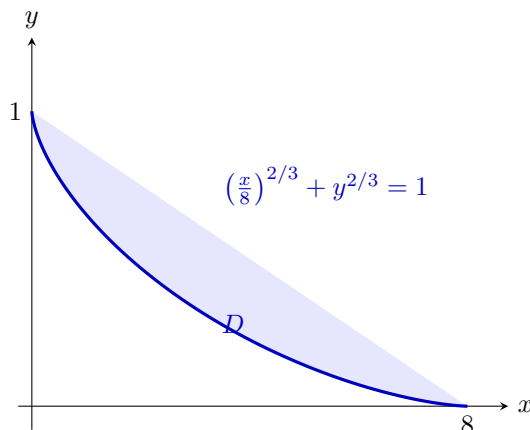
線分を含む直線を切片形で表し、直線群とそのパラメータ微分を連立して包絡線を求める。境界を媒介表示  $x = 8 \cos^3 \theta$ ,  $y = \sin^3 \theta$  としたあと、回転体積を表示積分で計算する。

【解答】

$c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$  とおく.  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  なので  $c, s \geq 0$  である. 点は  $P = (0, s)$ ,  $Q = (8c, 0)$  であるから,  $c > 0, s > 0$  のとき線分  $PQ$  を含む直線は  $\frac{x}{8c} + \frac{y}{s} = 1$  で表される. 端の  $\theta = 0, \pi/2$  は極限として同じ領域の境界に含まれる.

直線群  $F(x, y, \theta) = \frac{x}{8 \cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} - 1 = 0$  の包絡線を求める. 包絡線上では  $F = 0$  に加えて,  $\theta$  で微分した式も 0 である. すなわち  $\frac{x \sin \theta}{8 \cos^2 \theta} - \frac{y \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0$  である.  $c = \cos \theta, s = \sin \theta$  と書くと  $\frac{xs}{8c^2} = \frac{yc}{s^2}$  であり,  $xs^3 = 8yc^3$  を得る.

一方、直線の式は  $\frac{x}{8c} + \frac{y}{s} = 1$  である. この 2 式を満たす点を求めると  $x = 8c^3$ ,  $y = s^3$  となる.



線分群の包絡線は第 1 象限のアステロイド型曲線になる。

したがって包絡線は  $\left(\frac{x}{8}\right)^{2/3} + y^{2/3} = c^2 + s^2 = 1$  である. よって上側の境界は

$$y = \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{2/3}\right\}^{3/2} \quad (0 \leq x \leq 8)$$

である.  $D$  は第 1 象限内で、この境界の下側の部分である. したがって  $x$  軸のまわりに回転してできる立体の体積は

$$V = \pi \int_0^8 y^2 dx = \pi \int_0^8 \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{2/3}\right\}^3 dx$$

である.

ここで  $x = 8u^3$  とおくと,  $dx = 24u^2 du$  であり,  $x = 0$  から 8 まで動くとき  $u = 0$  から 1 まで動く. よって

$$\begin{aligned} V &= 24\pi \int_0^1 u^2 (1 - u^2)^3 du \\ &= 24\pi \int_0^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du \\ &= 24\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right). \end{aligned}$$

括弧内は

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} = \frac{105 - 189 + 135 - 35}{315} = \frac{16}{315}$$

であるから  $V = 24\pi \cdot \frac{16}{315} = \frac{128\pi}{105}$  である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

固定点がどれかの線分の下側に入るための条件を、 $A/c + B/s$  の最小化として直接判定する。これにより通過領域の不等式を得て、同じ体積積分へ進む。

### 【解答】

領域条件を直接最小化する。

$A = x/8$ ,  $B = y$  とおく。点  $(x, y)$  が、端点  $(0, \sin \theta)$  と  $(8 \cos \theta, 0)$  を結ぶ線分上またはその下側に入るための条件は、正数  $c, s$  で

$$c^2 + s^2 = 1, \quad \frac{A}{c} + \frac{B}{s} \leq 1$$

を満たすものが存在することである。

固定した  $A, B \geq 0$  に対し

$$\Phi(c) = \frac{A}{c} + \frac{B}{\sqrt{1-c^2}} \quad (0 < c < 1)$$

を最小化する。微分して  $\Phi'(c) = 0$  とすると

$$\frac{A}{c^2} = \frac{Bc}{(1-c^2)^{3/2}},$$

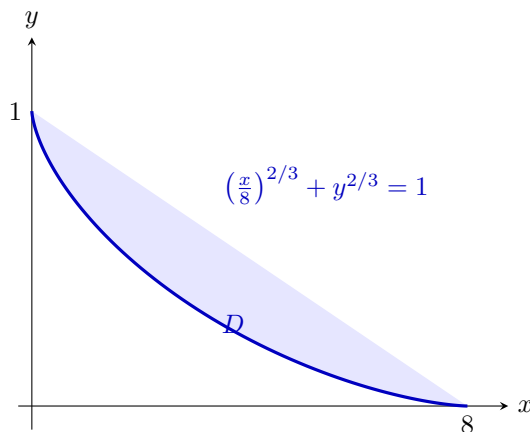
すなわち  $c : s = A^{1/3} : B^{1/3}$  となる。このときの最小値は

$$\min \left( \frac{A}{c} + \frac{B}{s} \right) = \left( A^{2/3} + B^{2/3} \right)^{3/2}$$

である。したがって  $D$  の条件は

$$\left( \frac{x}{8} \right)^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

である。



線分群の包絡線は第 1 象限のアステロイド型曲線になる。

上端を

$$y = \left\{ 1 - \left( \frac{x}{8} \right)^{2/3} \right\}^{3/2}$$

と書けば、回転体積は

$$V = \pi \int_0^8 \left\{ 1 - \left( \frac{x}{8} \right)^{2/3} \right\}^3 dx$$

である。ここで  $x = 8u^3$  と置くと

$$\begin{aligned} V &= 24\pi \int_0^1 u^2(1-u^2)^3 du \\ &= 24\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) \\ &= 24\pi \cdot \frac{16}{315} = \frac{128\pi}{105}. \end{aligned}$$

【総評】 動く線分が作る領域を包絡線で捉える問題である。端点の軌跡ではなく、線分全体の通過領域を見るため、境界が楕円ではなくアステロイド型の曲線になる。包絡線の計算では  $x = 8\cos^3\theta, y = \sin^3\theta$  を出すところが核心で、その後は  $y^2$  を積分して回転体積にする。別解の最小化は領域条件を直接与えるので、包絡線の意味を確認するのに有効である。目安時間は 25 分程度。

### 【第 3 問】

実数の組  $(p, q)$  に対し、 $f(x) = (x-p)^2 + q$  とおく。

- (1) 放物線  $y = f(x)$  が点  $(0, 1)$  を通り、しかも直線  $y = x$  の  $x > 0$  の部分と接するような実数の組  $(p, q)$  と接点の座標を求めよ。
- (2) 実数の組  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  に対して、 $f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$  および  $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$  とおく。実数  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば、区間  $\alpha \leq x \leq \beta$  において不等式  $f_1(x) < f_2(x)$  がつねに成り立つことを示せ。

- (3) 長方形  $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$  を考える。また、4 点  $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$  をこの順に線分で結んで得られる折れ線を  $L$  とする。実数の組  $(p, q)$  を、放物線  $y = f(x)$  と折れ線  $L$  に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき、 $R$  の点のうちで放物線  $y = f(x)$  が通過する点全体の集合を  $T$  とする。 $R$  から  $T$  を除いた領域  $S$  を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。

### 【方針】

(1) は接点の  $x$  座標を  $t$  とおき、接する条件を  $f'(t) = 1$ 、通る条件を  $f(t) = t$  として処理する。さらに  $(0, 1)$  を通る条件で  $p, q$  を決め、接点が  $x > 0$  側にあるものだけを残す。(2) は  $f_1 - f_2$  で 2 次の項が消えて一次式になることを使い、端点で負なら区間内でも負であることを示す。(3) は折れ線  $L$  を避ける放物線を、 $y = x$  の上側にある場合と下側にある場合に分ける。長方形  $R$  に現れるのは上側の場合だけで、縦線分と斜め線分を避けるための  $q$  の下限を固定した  $p$  ごとに求める。最後に固定した  $x$  で到達できる最小の  $y$  を最小化し、 $S$  の境界と面積を出す。

### 【解答】

#### (1)

接点の  $x$  座標を  $t$  とする。放物線  $f(x) = (x-p)^2 + q$  の導関数は  $f'(x) = 2(x-p)$  である。直線  $y = x$  と接するので、接点での傾きが 1 に等しい。したがって  $2(t-p) = 1$  であり、 $t = p + \frac{1}{2}$  である。また接点は直線  $y = x$  上にあるから  $f(t) = t$  である。すなわち  $(t-p)^2 + q = t$  であり、 $t-p = 1/2$  を用いると  $\frac{1}{4} + q = p + \frac{1}{2}$  だから  $q = p + \frac{1}{4}$  である。

さらに放物線は点  $(0, 1)$  を通るので  $f(0) = p^2 + q = 1$  である。ここに  $q = p + 1/4$  を代入して  $p^2 + p + \frac{1}{4} = 1$  すなわち  $p^2 + p - \frac{3}{4} = 0$  を得る。よって  $(2p-1)(2p+3) = 0$  であり、 $p = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$  である。

それぞれの接点の  $x$  座標は  $t = p + 1/2$  だから、 $p = 1/2$  のとき  $t = 1$ 、 $p = -3/2$  のとき  $t = -1$  である。条件は直線  $y = x$  の  $x > 0$  の部分と接することであるから、 $t > 0$  となる  $p = 1/2$  だけが適する。このとき  $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  であり、接点は  $(t, t) = (1, 1)$  である。したがって  $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 、接点  $(1, 1)$  である。

#### (2)

差をとると  $f_1(x) - f_2(x) = \{(x-p_1)^2 + q_1\} - \{(x-p_2)^2 + q_2\}$  である。展開すると  $x^2$  の項が消え、 $f_1(x) - f_2(x) = 2(p_2 - p_1)x + (p_1^2 - p_2^2 + q_1 - q_2)$  となる。したがって  $f_1(x) - f_2(x)$  は  $x$  の一次式である。

一次式を  $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$  とおく。仮定より  $g(\alpha) < 0$ 、 $g(\beta) < 0$  である。 $\alpha \leq x \leq \beta$  のとき、ある  $0 \leq \lambda \leq 1$  を用いて  $x = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$  と表せる。一次式の性質から  $g(x) = (1-\lambda)g(\alpha) + \lambda g(\beta)$  である。右辺は負の数の和であるから  $g(x) < 0$  である。よって  $f_1(x) < f_2(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \beta$ ) が成り立つ。

#### (3)

折れ線  $L$  は、縦線分  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$  と、斜め線分  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  と、縦線分  $x = 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  からなる。

放物線  $y = f(x)$  が斜め線分  $y = x$  と共有点をもたないなら、 $0 \leq x \leq 1$  で  $f(x) - x$  は 0 にならない。したがってこの区間で  $f(x) > x$  が常に成り立つか、または  $f(x) < x$  が常に成り立つかのどちらかである。

まず  $f(x) < x$  が常に成り立つ場合を考える。縦線分を避けるためには、 $x = 0$  で  $f(0)$  が  $[0, 1]$  に入ってはならない。しかも  $f(0) < 0$  である。同様に  $x = 1$  でも  $f(1) < 1$  であり、縦線分を避けるためには  $f(1) < 0$  でなければならない。放物線  $f(x)$  は下に凸なので、 $0 \leq x \leq 1$  では両端の値を結ぶ線分以下にあり、特に  $f(x) < 0$  となる。したがってこの場合、長方形  $R$  の内部の点  $(x, y)$  で  $0 \leq y \leq 2$  を通過しない。

よって  $R$  に現れる放物線は  $f(x) > x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を満たすものだけである。このとき縦線分を避ける条件は  $f(0) > 1$ ,  $f(1) > 1$  である。

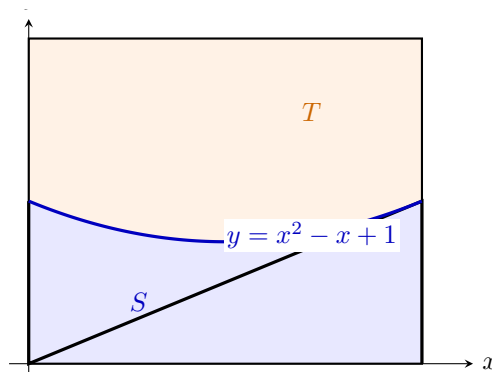
固定した  $p$  について、これらの条件を  $q$  の条件に直す。まず  $f(0) = p^2 + q > 1$  より  $q > 1 - p^2$  であり、 $f(1) = (1 - p)^2 + q > 1$  より  $q > 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$  である。また  $f(x) > x$  が  $0 \leq x \leq 1$  で成り立つためには  $(x - p)^2 + q > x$  すなわち  $q > x - (x - p)^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) が必要である。

右辺  $x - (x - p)^2$  の最大値も考慮すると、結局  $q$  は  $1 - p^2$ ,  $2p - p^2$ ,  $\max_{0 \leq x \leq 1} \{x - (x - p)^2\}$  より大きくななければならない。この 3 つの最大を調べると、 $p \leq 1/2$  では  $q > 1 - p^2$  が下限を与え、 $p \geq 1/2$  では  $q > 2p - p^2$  が下限を与える。実際、 $p \leq 1/2$  では  $1 - p^2 \geq 2p - p^2$  であり、斜め線分から来る最大値も  $1 - p^2$  以下である。 $p \geq 1/2$  では  $2p - p^2 \geq 1 - p^2$  で、斜め線分から来る最大値も  $2p - p^2$  以下である。

したがって、固定した  $x$  に対して放物線が到達できる  $y$  の下限を求める。 $p \leq 1/2$  の側では  $y = (x - p)^2 + q$  の下限は  $(x - p)^2 + 1 - p^2 = x^2 - 2px + 1$  である。 $0 \leq x \leq 1$  では、これは  $p$  が大きいほど小さいので、 $p = 1/2$  で最小となる。

一方、 $p \geq 1/2$  の側では下限は  $(x - p)^2 + 2p - p^2 = x^2 + 2p(1 - x)$  である。 $0 \leq x \leq 1$  では、これは  $p$  が小さいほど小さいので、やはり  $p = 1/2$  で最小となる。

よって固定した  $x$  で到達できる最小境界は  $y = x^2 - x + 1$  である。したがって、長方形  $R$  の中で放物線が通過できる点全体  $T$  は、この曲線より上側に現れる。したがって  $R$  から  $T$  を除いた領域  $S$  は、面積の計算上  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x^2 - x + 1$  で表される領域である。



折れ線  $L$  を避ける放物線の限界が、領域  $S$  の上端を与える。

よってその面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

である。境界曲線  $y = x^2 - x + 1$  は、(1) で得た  $p = 1/2, q = 3/4$  の放物線であり、折れ線に接する限界の放物線になっている。

**【総評】** (1)(2) は (3) の準備になっており、特に (2) は「端点で上下関係が決まれば区間全体で保たれる」という判定として使う。最難所は (3) で、折れ線を避ける条件を縦線分 2 本と斜め線分 1 本に分解して、 $q$  の下限を正確に取ることにある。下側にある放物線は長方形内に現れないため、上側の場合だけを追えばよい。境界  $y = x^2 - x + 1$  が (1) の接する放物線になることに気づくと、図示の意味も確認しやすい。目安時間は 35 分程度。

## 【第 4 問】

$a, b, c$  を正の定数とし、 $x$  の関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  を考える。以下、定数はすべて実数とする。

- (1) 定数  $p, q$  に対し、次をみたす定数  $r$  が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

- (2) 恒等式  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$  を用いて、次をみたす定数  $k, l$  が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

- (3) すべての自然数  $n$  に対して、 $\sqrt[3]{f(n)}$  が自然数であるとする。このとき関数  $f(x)$  は、自然数の定数  $m$  を用いて  $f(x) = (x + m)^3$  と表されることを示せ。

## 【方針】

(1) は  $x \geq 1$  なら定数項も  $x$  の倍で押さえられることを使う。(2) は  $k = a/3$  と置いて  $f(x) - (x + k)^3$  の  $x^2$  項を消し、残った一次式を (1) で  $rx$  以下に抑える。さらに立方差の公式を  $\alpha = \sqrt[3]{f(x)}$ 、 $\beta = x + k$  に適用し、分母を  $x^2$  以上と評価して  $l/x$  型にする。(3) は  $\sqrt[3]{f(n)} - n$  が整数であり、かつ固定実数  $k$  に近づくことから、十分大きな  $n$  では同じ整数  $m$  に固定されると示す。無限個の自然数で一致する 2 つの 3 次多項式は恒等的に等しい。

## 【解答】

(1)  $x \geq 1$  なら  $|px + q| \leq |p|x + |q|$  である。また  $x \geq 1$  より  $|q| \leq |q|x$  であるから  $|px + q| \leq (|p| + |q|)x$  である。したがって  $r = |p| + |q|$  とすれば、求める条件  $x \geq 1 \implies |px + q| \leq rx$  が成り立つ。

(2)  $k = \frac{a}{3}$  とおく。このとき  $(x + k)^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3$  であり、 $3k = a$  なので  $x^2$  の係数が  $f(x)$  と一致する。したがって  $f(x) - (x + k)^3$  は高々一次式である。実際に  $f(x) - (x + k)^3 = (b - 3k^2)x + (c - k^3)$  である。

(1) より、ある定数  $r$  が存在して、 $x \geq 1$  なら  $|f(x) - (x + k)^3| \leq rx$  が成り立つ。

ここで  $\alpha = \sqrt[3]{f(x)}$ 、 $\beta = x + k$  とおく。与えられた恒等式  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$  を用いると

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} - (x + k) \right| = \frac{|f(x) - (x + k)^3|}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$$

である。 $a, b, c$  は正で、 $x \geq 1$  であるから  $f(x) > 0$  であり、 $\alpha > 0$  である。また  $k = a/3 > 0$  なので  $\beta = x + k \geq x$  である。よって  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq \beta^2 \geq x^2$  である。したがって  $\left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{rx}{x^2} = \frac{r}{x}$  である。よって  $l = r$  とすればよい。

## (3)

(2) で得た定数  $k, l$  に対して、すべての自然数  $n$  について  $\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - k \right| \leq \frac{l}{n}$  が成り立つ。仮定より  $\sqrt[3]{f(n)}$  は自然数であるから  $M_n = \sqrt[3]{f(n)} - n$  は整数である。上の不等式は  $|M_n - k| \leq \frac{l}{n}$  と書ける。 $n$  を十分大きく取れば  $\frac{l}{n} < \frac{1}{2}$  である。このとき整数  $M_n$  は固定された実数  $k$  から距離  $1/2$  未満の範囲にある。長さ  $1$  未満の区間には整数は高々 1 つしか入らないので、十分大きな  $n$  について  $M_n$  は同じ整数に等しい。この整数を  $m$  とおく。

すると十分大きなすべての自然数  $n$  について  $\sqrt[3]{f(n)} - n = m$  であるから  $f(n) = (n + m)^3$  である。

ここで 2 つの多項式  $f(x)$  と  $(x + m)^3$  を考える。これらは十分大きなすべての自然数  $n$  で一致するので、無限に多くの  $x$  で一致する。したがって多項式として恒等的に等しい。よって  $f(x) = (x + m)^3$  である。

最後に  $m$  が自然数であることを確認する。恒等式  $f(x) = (x + m)^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$  と  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  を比べると  $a = 3m$ 、 $b = 3m^2$ 、 $c = m^3$  である。 $a, b, c$  は正なので  $m > 0$  であり、また上で  $m$  は整数であったから、 $m$  は自然数である。

【総評】 立方根の近似評価から整数値条件を固定する論証問題で、阪大 2011 の中でも抽象度が高い。(2) で  $k = a/3$  と置く理由は、 $(x + k)^3$  と  $f(x)$  の  $x^2$  項を一致させ、差を一次式まで落とすためである。(3) では「整数が固定実数にいくらでも近づくなら、最終的には一定」という離散性を明確に書く必要がある。無限個の点で一致する多項式は同一、という最後の締めも採点点である。目安時間は 35 分程度。

## 【第 5 問】

正数  $r$  に対して、 $a_1 = 0$ ,  $a_2 = r$  とおき、数列  $\{a_n\}$  を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし  $a_n$  と  $a_{n-1}$  から漸化式を用いて  $a_{n+1}$  を決める際には硬貨を投げ、表がでたとき  $r_n = \frac{r}{2}$ , 裏がでたとき  $r_n = \frac{1}{2r}$  とする。ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする。 $a_n$  の期待値を  $p_n$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $p_3$  および  $p_4$  を、 $r$  を用いて表せ。
- (2)  $n \geq 3$  のときに  $p_n$  を、 $n$  と  $r$  を用いて表せ。
- (3) 数列  $\{p_n\}$  が収束するような正数  $r$  の範囲を求めよ。
- (4)  $r$  が (3) で求めた範囲を動くとき、極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  の最小値を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

差  $d_n = a_n - a_{n-1}$  に注目する。漸化式から  $d_{n+1} = r_n d_n$  であり、 $r_n$  はそれ以前の硬貨投げで決まる  $d_n$  と独立なので、期待値の差  $p_{n+1} - p_n$  は  $\lambda(p_n - p_{n-1})$  となる。ただし  $\lambda = E(r_n) = (r + 1/r)/4$  である。したがって差の期待値は等比数列になり、 $p_n$  は等比和で表せる。収束条件は  $\lambda < 1$ 、極限値の最小は  $4r^2/(4r - r^2 - 1)$  を微分して求める。

## 【解答】

(1)

まず  $\lambda = E(r_n)$  とおく。硬貨の表裏は等確率なので

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{r + \frac{1}{r}}{4}$$

である。

漸化式  $a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1})$  より  $a_{n+1} - a_n = r_n(a_n - a_{n-1})$  である。 $r_n$  は  $a_n - a_{n-1}$  を決める以前の硬貨投げとは独立なので、期待値を取ると  $p_{n+1} - p_n = \lambda(p_n - p_{n-1})$  となる。 $p_1 = 0$ ,  $p_2 = r$  であるから  $p_2 - p_1 = r$  である。したがって  $p_3 - p_2 = \lambda r$  なので  $p_3 = r + \lambda r = r + \frac{r^2 + 1}{4}$  である。また  $p_4 - p_3 = \lambda(p_3 - p_2) = \lambda^2 r$  だから  $p_4 = r + \lambda r + \lambda^2 r$  である。これを  $r$  で表すと  $p_4 = r + \frac{r^2 + 1}{4} + \frac{(r^2 + 1)^2}{16r}$  である。

よって

$$p_3 = r + \frac{r^2 + 1}{4}, \quad p_4 = r + \frac{r^2 + 1}{4} + \frac{(r^2 + 1)^2}{16r}$$

である。

(2)

上で見たように  $p_{n+1} - p_n = \lambda(p_n - p_{n-1})$  であり、初めの差は  $p_2 - p_1 = r$  である。したがって  $p_{k+1} - p_k = \lambda^{k-1} r$  ( $k \geq 1$ ) である。ただし  $k = 1$  では  $p_2 - p_1 = r$  である。

よって  $n \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} p_n &= p_1 + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \dots + (p_n - p_{n-1}) \\ &= r(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-2}) \end{aligned}$$

である。すなわち

$$p_n = r(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-2}), \quad \lambda = \frac{r + \frac{1}{r}}{4}$$

である。

(3)  $r > 0$  なので  $\lambda > 0$  である。 $p_n$  は初項  $r$ 、公比  $\lambda$  の等比和で表されるから、 $\{p_n\}$  が収束するための必要十分条件は  $\lambda < 1$  である。したがって  $\frac{r + \frac{1}{r}}{4} < 1$  すなわち  $r + \frac{1}{r} < 4$  である。 $r > 0$  なので両辺に  $r$  をかけて  $r^2 - 4r + 1 < 0$  となる。よって  $(r - (2 - \sqrt{3}))(r - (2 + \sqrt{3})) < 0$  であるから  $2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}$  である。

(4)

(3) の範囲では  $\lambda < 1$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{r}{1 - \lambda}$  である。 $\lambda = (r + 1/r)/4$  を代入すると

$$\frac{r}{1 - \lambda} = \frac{r}{1 - \frac{r + \frac{1}{r}}{4}} = \frac{4r^2}{4r - r^2 - 1}$$

である。これを  $F(r) = \frac{4r^2}{4r - r^2 - 1}$  とおく。定義域は  $2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}$  であり、この範囲では分母は正である。

微分すると  $F'(r) = \frac{8r(2r - 1)}{(4r - r^2 - 1)^2}$  である。分母は正で、 $r > 0$  なので、符号は  $2r - 1$  で決まる。したがって  $F(r)$  は  $r < \frac{1}{2}$  で減少し、 $r > \frac{1}{2}$  で増加する。 $1/2$  は (3) の範囲に含まれるので、最小は  $r = 1/2$  のときにとられる。

このとき

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

差  $d_n = a_n - a_{n-1}$  を硬貨投げで現れる係数の積として明示し、独立性から各積の期待値を直接求める。期待値の漸化式を先に立てず、確率変数  $a_n$  自体を積の和に展開する別解である。

### 【解答】

(1)・(2)

差を各硬貨列の積として表す。

$d_n = a_n - a_{n-1}$  とおくと、 $d_2 = r$  であり

$$d_{n+1} = r_n d_n$$

である。したがって

$$d_3 = rr_2, \quad d_4 = rr_2r_3, \quad \dots, \quad d_n = rr_2r_3 \cdots r_{n-1}.$$

一方、 $a_1 = 0$  だから

$$a_n = d_2 + d_3 + \cdots + d_n = r(1 + r_2 + r_2r_3 + \cdots + r_2r_3 \cdots r_{n-1}).$$

各回の硬貨投げは独立で、

$$\lambda = E(r_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{r + \frac{1}{r}}{4}$$

である。積の期待値は期待値の積になるので

$$p_n = E(a_n) = r(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-2}).$$

特に

$$p_3 = r + \frac{r^2 + 1}{4}, \quad p_4 = r + \frac{r^2 + 1}{4} + \frac{(r^2 + 1)^2}{16r}.$$

(3)

$r > 0$  だから  $\lambda > 0$  であり、 $\{p_n\}$  が収束するための必要十分条件は  $\lambda < 1$  である。よって

$$r + \frac{1}{r} < 4$$

を解いて

$$2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}$$

を得る。この範囲では

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{r}{1 - \lambda} = \frac{4r^2}{4r - r^2 - 1}$$

である。

(4)

 $F(r) = 4r^2/(4r - r^2 - 1)$  とおくと

$$F'(r) = \frac{8r(2r-1)}{(4r-r^2-1)^2}.$$

したがって最小は  $r = 1/2$  のときにとられ、その値は

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

である。

**【総評】** 確率付き漸化式だが、値そのものではなく差  $a_n - a_{n-1}$  を見ると一気に等比数列になる。 $r_n$  がその時点の差と独立であるため、期待値を分離できることを明示すると論証が安定する。収束条件は  $\lambda < 1$  であり、 $r + 1/r < 4$  から範囲を出す。最後の最小値は端ではなく内部の  $r = 1/2$  で取られるので、微分の符号変化まで書くと確実である。目安時間は 25 分程度。