

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2012 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{2 + n(a_n + 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を n を用いて表せ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n$$

第 2 問

θ を実数とし、行列 $P(\theta), J, E$ を

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。 $Q = P(2\pi/3)$ とおく。 n, k を自然数とする。 n 個の Q と k 個の J からなる順列 $A_1, A_2, \dots, A_{n+k}$ で、行列の積 $A_1 A_2 \cdots A_{n+k}$ が E と等しいものの個数を $N(n, k)$ とする。

- (1) $JP(\theta) = P(-\theta)J$ を示せ。
- (2) $N(200, 2)$ を求めよ。
- (3) $N(10, 4)$ を求めよ。

第 3 問

2つの関数を

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad g(t) = t^2 - 2 \log t$$

で定める。実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき、点 $(f(t), g(t))$ が xy 平面上に描く曲線を C とする。

- (1) $t > 1$ のとき $g(t) > g(1/t)$ であることを示せ。
- (2) s を 1 以上の実数とする。直線 $x = \frac{1}{2}(s + 1/s)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。
- (3) a を 1 より大きい実数とする。直線 $x = \frac{1}{2}(a + 1/a)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 4 問

a を 1 以上の実数とする。 x についての方程式

$$(4x^3 - 1)(x - a) - 3a^2 + 1 = 0$$

の最大の実数解を $s(a)$ とし、 $s(a)$ の小数部分を $r(a)$ とする。すなわち、 $s(a)$ 以下の最大の整数を $[s(a)]$ とするとき、 $r(a) = s(a) - [s(a)]$ によって $r(a)$ を定める。

- (1) $a < s(a) < a + 1$ を示せ。
- (2) 自然数 n に対し $b_n = s(n)r(n)$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
- (3) 次の条件 (P) を満たす実数 c の範囲を求めよ。
(P) すべての自然数 n に対して $s(n)r(n) < c$ が成り立つ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)