

大阪大学 2012 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{2 + n(a_n + 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
 (2) 一般項 a_n を n を用いて表せ。
 (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n$$

▶ 解法 1

【方針】

まず数項を計算して $a_n = 1/n^2$ を予想する。漸化式への代入による数学的帰納法で一般項を確定し、最後は $m/n^2 = (1/m)\{1/(n/m)^2\}$ と変形して区分求積法へつなぐ。和の添字が $m+1$ から $2m$ までであることを確認し、積分区間を $[1, 2]$ とする。

【解答】

(1) $a_1 = 1$ を漸化式に代入すると

$$a_2 = \frac{1}{2 + (1 + 1)} = \frac{1}{4}.$$

さらに

$$a_3 = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{2 + 2(\frac{1}{4} + 1)} = \frac{1}{9}, \quad a_4 = \frac{3 \cdot \frac{1}{9}}{2 + 3(\frac{1}{9} + 1)} = \frac{1}{16}.$$

したがって $a_2 = 1/4, a_3 = 1/9, a_4 = 1/16$ である。(2) (1) から $a_n = 1/n^2$ と予想する。 $n = 1$ のとき実際に $a_1 = 1 = 1/1^2$ である。 $a_n = 1/n^2$ と仮定すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n \cdot \frac{1}{n^2}}{2 + n(\frac{1}{n^2} + 1)} \\ &= \frac{1/n}{2 + 1/n + n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

よって数学的帰納法により、すべての正の整数 n について

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

である。

(3) (2) より

$$\begin{aligned} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n &= m \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{(n/m)^2}. \end{aligned}$$

右辺は関数 $1/x^2$ の区間 $[1, 2]$ における区分求積和であるから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

▶ 解法 2 (逆数漸化式と望遠和評価)

【方針】

$b_n = 1/a_n$ において漸化式を分母側へ移し、 $d_n = b_n - n^2$ が初項 0 の斉次漸化式を満たすことから一般項を確定する。極限は区分求積法を使わず、 $1/n^2$ を前後の望遠差で挟んで求める。

【解答】

(1) 漸化式へ順に代入すると

$$a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = \frac{1}{16}.$$

(2)

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

とおく。漸化式の逆数をとると

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2 + n(a_n + 1)}{na_n} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)b_n + 1 = \frac{n+2}{n}b_n + 1. \end{aligned}$$

ここで $d_n = b_n - n^2$ とおけば

$$d_{n+1} = \frac{n+2}{n}d_n.$$

$d_1 = b_1 - 1 = 0$ であるから、すべての n で $d_n = 0$ である。したがって

$$b_n = n^2, \quad a_n = \frac{1}{n^2}.$$

(3) $n \geq 2$ に対して

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

である。 $n = m+1, \dots, 2m$ について加えると

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2m+1} < \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{2m}.$$

各辺に m を掛けると、左右はいずれも $1/2$ に収束する。よって、はさみうちの原理により

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \sum_{n=m+1}^{2m} a_n = \frac{1}{2}.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 12 分程度。(1) の数値から平方数分母を見抜き、(2) を帰納法で確定するところまでは必答である。(3) では和を単に積分へ置き換えず、 $m/n^2 = (1/m)/(n/m)^2$ として刻み幅 $1/m$ を明示することが主な採点点になる。添字が $m+1$ 始まりでも極限の積分区間は $[1, 2]$ であり、端点 1 の一項の有無は極限に影響しない。一般項の分母整理と区分求積法の係数を取り違えないようにしたい。

【第 2 問】

θ を実数とし、行列 $P(\theta), J, E$ を

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。 $Q = P(2\pi/3)$ とおく。 n, k を自然数とする。 n 個の Q と k 個の J からなる順列 $A_1, A_2, \dots, A_{n+k}$ で、行列の積 $A_1 A_2 \cdots A_{n+k}$ が E と等しいものの個数を $N(n, k)$ とする。

- (1) $JP(\theta) = P(-\theta)J$ を示せ。
- (2) $N(200, 2)$ を求めよ。
- (3) $N(10, 4)$ を求めよ。

【方針】

(1) は両辺を直接計算する。(2)(3) では、各 J の間に入る Q の個数を非負整数で表す。関係 $JQ = Q^{-1}J$ 、 $Q^3 = E$ 、 $J^2 = E$ を使うと、積が E となる条件は交互の区画に入る Q の総数についての 3 を法とする条件になる。区画数の数え上げでは、和が一定となる非負整数解の個数を用いる。

【解答】

(1) 左辺を計算すると

$$JP(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

一方、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ より

$$P(-\theta)J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

したがって $JP(\theta) = P(-\theta)J$ である。特に $JQ = Q^{-1}J$ であり、また $Q^3 = E$ 、 $J^2 = E$ である。

(2) 2 個の J の前、間、後にある Q の個数をそれぞれ a, b, c とする。このとき a, b, c は非負整数で $a + b + c = 200$ であり、積は

$$Q^a J Q^b J Q^c = Q^{a-b+c} = Q^{200-2b}$$

となる。これが E となるための条件は $200 - 2b$ が 3 の倍数、すなわち $b \equiv 1 \pmod{3}$ である。よって $b = 1, 4, \dots, 199$ であり、67 通りある。

固定した b に対して $a + c = 200 - b$ の非負整数解は $201 - b$ 個だから

$$\begin{aligned} N(200, 2) &= \sum_{j=0}^{66} \{201 - (1 + 3j)\} \\ &= 67 \cdot 200 - 3 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} \\ &= 6767. \end{aligned}$$

(3) 4 個の J で区切られる 5 区画に入る Q の個数を順に x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 とする。これらは非負整数で、和は 10 である。

(1) の関係を繰り返し用いると積は

$$Q^{x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4} = Q^{10 - 2(x_1 + x_3)}$$

となる。 $s = x_1 + x_3$ とおけば、積が E となる条件は $10 - 2s$ が 3 の倍数である。 $0 \leq s \leq 10$ より $s = 2, 5, 8$ である。

固定した s に対し、 $x_1 + x_3 = s$ の解は $s + 1$ 個、 $x_0 + x_2 + x_4 = 10 - s$ の解は ${}_{12-s}C_2$ 個である。したがって

$$\begin{aligned} N(10, 4) &= 3 \cdot {}_{10}C_2 + 6 \cdot {}_7C_2 + 9 \cdot {}_4C_2 \\ &= 3 \cdot 45 + 6 \cdot 21 + 9 \cdot 6 \\ &= 315. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 25 分程度。(1) から得る $JQ = Q^{-1}J$ が全体の核であり、行列を一語ずつ掛け続けるのではなく、 J によって区切られた Q の個数を導入できるかで差がつく。(2) では固定した中央区画の長さごとに両端の分配数を数え、(3) では符号が負になる第 2・第 4 区画の合計だけを先に固定する。3 を法とする条件、非負整数解の個数、同じ Q, J を区別しないことの 3 点を明記すると採点者が追いやすい。

【第 3 問】

2 つの関数を

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad g(t) = t^2 - 2 \log t$$

で定める。実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき、点 $(f(t), g(t))$ が xy 平面上に描く曲線を C とする。

(1) $t > 1$ のとき $g(t) > g(1/t)$ であることを示せ。

(2) s を 1 以上の実数とする。直線 $x = \frac{1}{2}(s + 1/s)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) a を 1 より大きい実数とする。直線 $x = \frac{1}{2}(a + 1/a)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

【方針】

$f(t) = f(1/t)$ という対称性に着目する。(1) では差 $h(t) = g(t) - g(1/t)$ を微分して正値を示す。(2) は $f(t) = f(s)$ を二次方程式にして解を $s, 1/s$ と特定し、(1) で対応する 2 点が異なることを確認する。(3) は $t \geq 1$ 側を共通の x の媒介変数として、上下の曲線の差に $dx = f'(t)dt$ を掛けて面積を積分する。

【解答】

(1) $h(t) = g(t) - g(1/t)$ とおく。 $g(1/t) = t^{-2} + 2 \log t$ であるから

$$h(t) = t^2 - \frac{1}{t^2} - 4 \log t.$$

したがって

$$h'(t) = 2t + \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t} = \frac{2(t^2 - 1)^2}{t^3}.$$

$t > 1$ では $h'(t) > 0$ であり、 $h(1) = 0$ だから $h(t) > 0$ である。よって $g(t) > g(1/t)$ が成り立つ。

(2) $f(t) = f(s)$ は

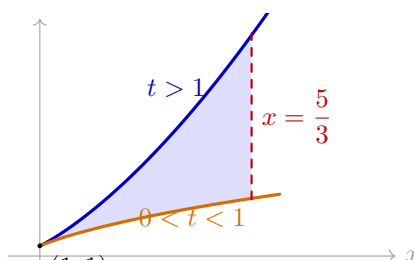
$$t + \frac{1}{t} = s + \frac{1}{s}$$

と同値である。両辺を整理すると

$$(t - s) \left(t - \frac{1}{s} \right) = 0$$

となるから、 $t = s$ または $t = 1/s$ である。

$s = 1$ のときは 2 つの値が一致するので共有点は 1 個である。 $s > 1$ のときは $s \neq 1/s$ であり、(1) より $g(s) > g(1/s)$ だから、同じ x 座標をもつ異なる 2 点になる。したがって共有点は 2 個である。曲線の 2 枝と縦線の位置関係は次のようになる。形状を見やすくするため、図では $a = 3$ としている。



(3) $1 \leq t \leq a$ とする。このとき $f'(t) = \frac{1}{2}(1 - t^{-2}) \geq 0$ であり、同じ $x = f(t)$ における上側の点は $(f(t), g(t))$ 、下側の点は $(f(t), g(1/t))$ である。(1) より上下関係も確定している。よって求める面積を S とすると

$$S = \int_1^a \{g(t) - g(1/t)\} f'(t) dt.$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_1^a \left(t^2 - \frac{1}{t^2} - 4 \log t \right) \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^a \left(t^2 - 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} - 4 \log t + \frac{4 \log t}{t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

ここで部分積分により

$$\int \frac{\log t}{t^2} dt = -\frac{\log t + 1}{t}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} + 3t - 4t \log t - \frac{3 + 4 \log t}{t} - \frac{1}{3t^3} \right]_1^a \\ &= \frac{a^3}{6} + \frac{3a}{2} - 2a \log a - \frac{3 + 4 \log a}{2a} - \frac{1}{6a^3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 25 分程度。 t と $1/t$ が同じ x 座標を与えることを見抜くのが最重要で、(1)(2) は (3) の上下 2 枝を正しく定めるための誘導である。面積では dy ではなく $dx = f'(t)dt$ を使い、上下の高さを $g(t) - g(1/t)$ とする。最後の積分は展開項が多いため、項 $(\log t)/t^2$ の原始関数を部分積分で別に求め、下端 $t = 1$ で原始関数が 0 になることを検算に使うとよい。

【第 4 問】

a を 1 以上の実数とする。 x についての方程式

$$(4x^3 - 1)(x - a) - 3a^2 + 1 = 0$$

の最大の実数解を $s(a)$ とし、 $s(a)$ の小数部分を $r(a)$ とする。すなわち、 $s(a)$ 以下の最大の整数を $[s(a)]$ とするとき、 $r(a) = s(a) - [s(a)]$ によって $r(a)$ を定める。

- (1) $a < s(a) < a + 1$ を示せ。
- (2) 自然数 n に対し $b_n = s(n)r(n)$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
- (3) 次の条件 (P) を満たす実数 c の範囲を求めよ。
(P) すべての自然数 n に対して $s(n)r(n) < c$ が成り立つ。

【方針】

方程式の左辺を $F_a(x)$ とする。 $x > a$ では $(4x^3 - 1)(x - a)$ が狭義増加するため、端点 $a, a + 1$ での符号から最大解の位置と一意性を同時に示せる。自然数 n では (1) により $r(n) = s(n) - n$ 。方程式を $b_n = s(n)\{s(n) - n\}$ の形に直して極限を求める。(3) は、 $x - n = 3/(4x)$ となる比較点を置き、実際の解がその点より小さいことから $b_n < 3/4$ を示す。

【解答】

(1)

$$F_a(x) = (4x^3 - 1)(x - a) - 3a^2 + 1$$

とおく。 $x > a \geq 1$ では $4x^3 - 1 > 0$ であり、 $4x^3 - 1$ と $x - a$ はともに正で狭義増加するから、その積も狭義増加する。したがって $F_a(x)$ は $x > a$ で狭義増加する。

また

$$F_a(a) = 1 - 3a^2 < 0$$

であり、

$$F_a(a + 1) = 4(a + 1)^3 - 3a^2 = 4a^3 + 9a^2 + 12a + 4 > 0$$

である。よって $a < x < a + 1$ にただ 1 つの解があり、 $x \geq a + 1$ には解がない。この解より大きい実数解は存在しないので

$$a < s(a) < a + 1$$

である。

(2) (1) で $a = n$ とすると $n < s(n) < n + 1$ だから、 $[s(n)] = n$ 、 $r(n) = s(n) - n$ である。方程式より

$$(4s(n)^3 - 1)\{s(n) - n\} = 3n^2 - 1.$$

したがって

$$b_n = s(n)\{s(n) - n\} = \frac{3n^2 - 1}{4s(n)^2 - 1/s(n)}.$$

(1) より $1 < s(n)/n < 1 + 1/n$ であるから $s(n)/n \rightarrow 1$ である。分子・分母を n^2 で割れば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{4}.$$

(3) 各自然数 n に対し、 $x > n$ で

$$x - n = \frac{3}{4x}$$

を満たす点を x_n とする。この点では $x_n(x_n - n) = 3/4$ である。また

$$\begin{aligned} F_n(x_n) &= (4x_n^3 - 1) \frac{3}{4x_n} - 3n^2 + 1 \\ &= 3(x_n^2 - n^2) + 1 - \frac{3}{4x_n}. \end{aligned}$$

ここで $x_n - n = 3/(4x_n)$ より

$$x_n^2 - n^2 = (x_n - n)(x_n + n) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{n}{x_n} \right).$$

したがって

$$F_n(x_n) = \frac{9}{4} \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) + 1 - \frac{3}{4x_n} > 0.$$

一方 $F_n(s(n)) = 0$ であり、(1) で示したように F_n は $x > n$ で狭義増加するから $s(n) < x_n$ である。関数 $x(x - n)$ も $x > n$ で狭義増加するので

$$b_n = s(n)\{s(n) - n\} < x_n(x_n - n) = \frac{3}{4}.$$

よって $c = 3/4$ なら条件 (P) は成り立ち、 $c > 3/4$ でも成り立つ。反対に $c < 3/4$ なら、(2) の $b_n \rightarrow 3/4$ より十分大きい n で $b_n > c$ となる。したがって求める範囲は

$$c \geq \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 6。想定時間は 30 分程度。(1) で単なる中間値の定理だけを述べると「最大の実数解」である根拠が不足するため、 $x > a$ における狭義増加まで書く必要がある。(2) は $s(n)/n \rightarrow 1$ を (1) から直接得て、未知の小数部分を無理に展開しないことが鍵。(3) では極限が $3/4$ というだけでは $c = 3/4$ が許されるか決まらないので、全ての n に対する厳密な上界 $b_n < 3/4$ を別途示す点が最大の採点ポイントである。