

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2012 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$a > 0$ とする. C_1 を曲線 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$, C_2 を直線 $y = 2ax - 3a$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P が C_1 上を動き, 点 Q が C_2 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする.

$f(a)$ を a を用いて表せ.

(2) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ を求めよ.

第 2 問

次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える.

(i) n は素数ではない.

(ii) l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると, 必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が偶数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (2) n が 7 の倍数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.

第 3 問

xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, \sqrt{3}, 1)$ がある. 平面 $z = 0$ に含まれ, 中心が O , 半径が 1 の円を W とする. 点 P が線分 OA 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく. 同様に点 P が線分 OB 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく. さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ.
- (2) 立体 V の体積を求めよ.

第 4 問

5 次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ (p, q, r, s, t は実数) について考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であることと,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$$

(l, m は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ.

- (2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする. α を実数, k を 3 以上の自然数とする. k 項からなる数列

$$f(\alpha), f(\alpha+1), f(\alpha+2), \dots, f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ.

第 5 問

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l ，2 回目に出る目を m ，3 回目に出る目を n で表すことにする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 極限值

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が存在する確率を求めよ．

(2) 関数

$$f(x) = \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が， $x > -1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)