

大阪大学 2012 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$a > 0$ とする. C_1 を曲線 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$, C_2 を直線 $y = 2ax - 3a$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が C_1 上を動き, 点 Q が C_2 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする. $f(a)$ を a を用いて表せ.
- (2) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

楕円上の点を $(\cos \theta, a \sin \theta)$ と表し, その点から直線 C_2 までの距離を最小化する. 距離の分子は $a(\sin \theta - 2 \cos \theta + 3)$ となるので, 三角関数の合成で範囲を求める. 絶対値を外す前に $3 - \sqrt{5} > 0$ を確認し, 最後に $a \rightarrow \infty$ の極限をとる.

【解答】

(1) C_1 は $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$ であり, $a > 0$ だから, C_1 上の点 P は $P = (\cos \theta, a \sin \theta)$ と表せる.

直線 C_2 は $y = 2ax - 3a$ すなわち $y - 2ax + 3a = 0$ である. 点 P からこの直線までの距離は

$$\frac{|a \sin \theta - 2a \cos \theta + 3a|}{\sqrt{1 + 4a^2}} = \frac{a|\sin \theta - 2 \cos \theta + 3|}{\sqrt{1 + 4a^2}}$$

である.

ここで $\sin \theta - 2 \cos \theta$ の最小値は $-\sqrt{1^2 + (-2)^2} = -\sqrt{5}$ であり, 最大値は $\sqrt{5}$ である. さらに $3 - \sqrt{5} > 0$ だから, $\sin \theta - 2 \cos \theta + 3$ は常に正である. よって距離を最小にするには, $\sin \theta - 2 \cos \theta$ を最小にすればよく, その最小値は $3 - \sqrt{5}$ である.

したがって $f(a) = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{1 + 4a^2}}$ である.

(2) (1) で得た式を用いると

$$f(a) = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{1 + 4a^2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}}$$

である. $a \rightarrow \infty$ のとき $1/a^2 \rightarrow 0$ だから $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ である.

▶ 解法 2 (単位円上の一次式)

【方針】

$(x, y) = (u, av)$ として楕円を単位円 $u^2 + v^2 = 1$ へ移す。直線までの距離の分子は $a(v - 2u + 3)$ なので、コーシー・シュワルツの不等式で $v - 2u$ の最小値と等号条件を直接求める。最後に得られた式の分母を a で割って極限を計算する。

【解答】

(1) 楕円上の点を

$$(x, y) = (u, av), \quad u^2 + v^2 = 1$$

と表す。直線 C_2 の方程式は

$$y - 2ax + 3a = 0$$

なので、この点から C_2 までの距離は

$$\frac{a|v - 2u + 3|}{\sqrt{1 + 4a^2}}$$

である。

コーシー・シュワルツの不等式より

$$v - 2u \geq -\sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{u^2 + v^2} = -\sqrt{5}.$$

等号は

$$(u, v) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

のときに成り立つ。また $3 - \sqrt{5} > 0$ であるから、絶対値の内部は常に正である。したがって

$$f(a) = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{1 + 4a^2}}.$$

(2)

$$f(a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{4 + 1/a^2}}$$

と変形できるので、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

【総評】 楕円上の点から直線までの距離を、三角関数または単位円上の一次式の範囲に帰着する問題である。目安時間は 18 分。最大の注意点は、距離公式の絶対値を外す前に $3 - \sqrt{5} > 0$ を確認すること、そして点 Q は直線上を自由に動けるため、固定した P からの最短距離は垂線距離でよいという点である。別解のように一次式の最小値を直接使うと、媒介変数を出さずに同じ評価に到達でき、見通しがよくなる。

【第 2 問】

次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える.

- (i) n は素数ではない.
 (ii) l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると, 必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が偶数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
 (2) n が 7 の倍数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
 (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.

【方針】

条件 (ii) は、1 でも n でもない約数全体が幅 2 以内に収まることを意味する。(1) は最小の非自明約数が 2 であること、(2) は 7 が非自明約数であることから候補を有限個に絞る。(3) は最小の非自明約数を p と置き、 p が素数であることと n/p も非自明約数であることを使って、 $n = p^2, p(p+1), p(p+2)$ の 3 型に分類する。最後は 1000 以下の候補を漏れなく列挙し、実際に条件をみたすことまで確認する。

【解答】

(1) n は偶数で、かつ素数ではないとする。 $n = 2$ は素数なので除かれるから、2 は 1 でも n でもない n の正の約数である。

条件 (ii) より、1 でも n でもない任意の正の約数 d は $|d - 2| \leq 2$ をみたす。したがって $d = 2, 3, 4$ のいずれかである。

$n = 2k$ とおく。 $n = 4$ のときは $k = 2$ であり、 $n > 4$ のときも $k = n/2$ は 1 でも n でもない約数である。よっていずれの場合も $k = 2, 3, 4$ でなければならない。したがって候補は $n = 4, 6, 8$ である。

実際に、4 の非自明な正の約数は 2、6 の非自明な正の約数は 2, 3、8 の非自明な正の約数は 2, 4 であり、どの場合も任意の 2 つの差は 2 以下である。よって求める n は 4, 6, 8 である。

(2) n が 7 の倍数で条件をみたすとする。 $n = 7$ は素数なので条件 (i) をみたさない。したがって $n \neq 7$ であり、7 は 1 でも n でもない正の約数である。

条件 (ii) より、任意の非自明な正の約数 d は $|d - 7| \leq 2$ をみたすから、 $d = 5, 6, 7, 8, 9$ のいずれかである。

また、 $n/7$ も n の正の約数であり、 $n \neq 7$ だから 1 でも n でもない。よって $\frac{n}{7} = 5, 6, 7, 8, 9$ でなければならない。したがって候補は 35, 42, 49, 56, 63 である。

それぞれを調べると、 $35 : 5, 7$ 、 $49 : 7$ は非自明な約数どうしの差が 2 以下である。一方、42 は 2, 3, 6, 7 など約数にもつので 2 と 7 の差が 5、56 は 2 と 7 の差が 5、63 は 3 と 7 の差が 4 となり、条件 (ii) をみたさない。

よって求める n は 35, 49 である。

(3) 条件をみたす n を考え、1 でも n でもない正の約数のうち最小のものを p とする。この p は素数である。実際、もし p が合成数なら、 p は 1 より大きく p より小さい約数をもつので、それが n の非自明な約数となり、 p の最小性に反する。

また、 n は素数ではないので $n > p$ であり、 n/p も 1 でも n でもない正の約数である。さらに p は最小の非自明約数だから $p \leq \frac{n}{p}$ であり、条件 (ii) を p と n/p に適用すると $\frac{n}{p} - p \leq 2$ である。したがって $\frac{n}{p} = p, p+1, p+2$ のいずれかである。

よって次の 3 つの場合に分けられる。

まず $\frac{n}{p} = p$ のとき、 $n = p^2$ である。これは任意の素数 p について条件をみたす。 $2 \leq n \leq 1000$ では $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ が可能である。

次に $\frac{n}{p} = p+1$ のときを考える。 p が奇素数なら $p+1$ は偶数であり、2 が $n = p(p+1)$ の非自明な約数になる。しかし $2 < p$ なので、 p が最小の非自明約数であることに反する。したがって $p = 2$ のみが可能で、このとき $n = 2 \cdot 3 = 6$ である。

最後に $\frac{n}{p} = p+2$ のときを考える。 $p = 2$ なら $n = 2 \cdot 4 = 8$ であり、これは条件をみたす。 p が奇素数のとき、 $p+2$ が合

成数であれば、 $p+2$ は 1 より大きく $p+2$ より小さい約数をもつ。その約数は $(p+2)/2 < p$ 以下なので、 n は p より小さい非自明な約数をもつことになり矛盾する。したがって $p+2$ も素数でなければならない。

$2 \leq p(p+2) \leq 1000$ で、 p と $p+2$ がともに素数であるものを調べると $p = 3, 5, 11, 17, 29$ が得られ、それぞれ 15, 35, 143, 323, 899 を与える。

以上を合わせ、重複を除いて小さい順に並べると、条件をみたす n は 4, 6, 8, 9, 15, 25, 35, 49, 121, 143, 169, 289, 323, 361, 529, 841, 899, 961 である。これらは、 p^2 型、6、8、または $p(p+2)$ 型として得られたものなので、いずれも非自明な約数全体が $p, p+1, p+2$ の範囲に収まり、条件 (ii) をみたす。

【総評】 約数全体が互いに 2 以内に収まるという条件を、最小の非自明約数から支配する整数問題である。目安時間は 30 分。(1)(2) は候補を絞ったあと、候補が本当に条件をみたすかを確認するところまで書くこと減点されにくい。(3) の核心は、最小の非自明約数 p が素数であり、同時に n/p も非自明約数になることから $n/p = p, p+1, p+2$ に限られる点である。 $p+1$ 型で p が奇素数なら 2 が割り込むこと、 $p+2$ 型では $p+2$ も素数でないより小さい約数が出ることを明示すると、分類の漏れを防げる。

【第 3 問】

xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, \sqrt{3}, 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ、中心が O 、半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。
- (2) 立体 V の体積を求めよ。

【方針】

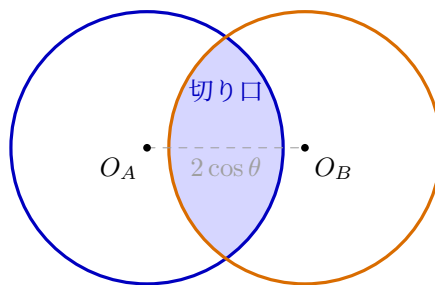
高さ z で切った断面を調べる。 V_A の断面は中心 $(z, 0)$ 、半径 1 の円板、 V_B の断面は中心 $(0, \sqrt{3}z)$ 、半径 1 の円板になる。 $z = \cos \theta$ とおくと 2 中心間距離は $2 \cos \theta$ なので、切り口は 2 つの単位円の共通部分である。共通部分の面積を「扇形 2 つから二等辺三角形 2 つを引く」として $2\theta - \sin 2\theta$ と求め、最後に $z = \cos \theta$ による置換で体積積分を計算する。

【解答】

(1) まず V_A を高さ z の平面で切る。点 P が線分 OA 上にあるから、 $0 \leq z \leq 1$ に対して $\vec{OP} = (z, 0, z)$ と表せる。また、 Q は平面 $z=0$ 上の中心 O 、半径 1 の円板内を動くので、 $\vec{OQ} = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leq 1$ と書ける。したがって $R = (z+u, v, z)$ となり、高さ z における V_A の断面は $(x-z)^2 + y^2 \leq 1$ で表される。これは中心 $(z, 0)$ 、半径 1 の円板である。

同様に、 V_B については、線分 OB 上の点 P が $\vec{OP} = (0, \sqrt{3}z, z)$ と表されるので、高さ z の断面は $x^2 + (y - \sqrt{3}z)^2 \leq 1$ である。これは中心 $(0, \sqrt{3}z)$ 、半径 1 の円板である。

いま問題では $z = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とおく。このとき 2 つの円板の中心間距離は $\sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \cos \theta)^2} = 2 \cos \theta$ である。切り口を平面上で見ると、次のような 2 円板の共通部分になる (図は位置関係を示す模式図)。



したがって切り口は、中心間距離が $2 \cos \theta$ である 2 つの単位円の共通部分である。2 つの円の交点とそれぞれの中心を結ぶと、各円で中心角 2θ の扇形から、面積 $\frac{1}{2} \sin 2\theta$ の二等辺三角形を引いた部分ができる。それが 2 つあるから、切り口の面積は $2(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) = 2\theta - \sin 2\theta$ である。

(2) 体積は、(1) で求めた断面積を z について 0 から 1 まで積分すればよい。 $z = \cos \theta$ とおくと $dz = -\sin \theta d\theta$ であり、

$z = 0$ のとき $\theta = \pi/2$ 、 $z = 1$ のとき $\theta = 0$ である。したがって

$$V = \int_0^1 \{\text{高さ } z \text{ の断面積}\} dz = \int_0^{\pi/2} (2\theta - \sin 2\theta) \sin \theta d\theta$$

である。

まず、部分積分により

$$\int_0^{\pi/2} 2\theta \sin \theta d\theta = [-2\theta \cos \theta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta d\theta = 2$$

である。また、

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

であり、 $w = \sin \theta$ とおくと

$$\int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^1 2w^2 dw = \frac{2}{3}$$

である。

よって $V = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ である。

【総評】 立体を直接描こうとするより、高さ一定の断面を 2 つの円板の共通部分として読むことが重要な空間図形問題である。目安時間は 25 分。 V_A の断面中心が $(z, 0)$ 、 V_B の断面中心が $(0, \sqrt{3}z)$ になる理由をベクトルの成分で書くと、図形の見通しが崩れにくい。共通部分の面積では、中心間距離 $2 \cos \theta$ から中心角が 2θ になる対応を落としやすい。最後の体積積分は $dz = -\sin \theta d\theta$ と積分区間の反転を丁寧に処理するのが計算上の山場である。

【第 4 問】

5 次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ (p, q, r, s, t は実数) について考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であることと、

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$$

(l, m は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする。 α を実数、 k を 3 以上の自然数とする。 k 項からなる数列

$$f(\alpha), f(\alpha+1), f(\alpha+2), \dots, f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ。

【方針】

(1) は $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ を基準にする。 $g(0), \dots, g(4)$ がすべて 0 であることから、 $f(0), \dots, f(4)$ が等差数列になる条件は、 $f(x) - g(x)$ が一次式になることと対応する。(2) では (1) の形に直したあと、一次式部分ほどの連続点でも等差数列を作るので、 g の二階差分だけを調べる。連続する k 項が等差数列になるために、 $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+k-3$ がすべて二階差分の零点 $0, 1, 2$ に入ることを用いて列挙する。

【解答】

(1) $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とおく。

まず $f(x) = g(x) + lx + m$ と書けるとする。このとき $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$ であるから、 $j = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $f(j) = lj + m$ である。したがって $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ は公差 l の等差数列である。

逆に、 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であるとする。その初項を m 、公差を l とおけば $f(j) = lj + m$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) である。すなわち多項式 $f(x) - (lx + m)$ は $x = 0, 1, 2, 3, 4$ をすべて根にもつ。

また、 $f(x)$ は最高次係数 1 の 5 次式であり、 $lx + m$ は一次式であるから、 $f(x) - (lx + m)$ も最高次係数 1 の 5 次式である。したがって $f(x) - (lx + m) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ であり、 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$ と書ける。

以上より、2 つの条件は互いに同値である。

(2) (1) より $f(x) = g(x) + lx + m$ と書ける。一次式 $lx + m$ の値は、 x を 1 ずつ増やすと常に公差 l の等差数列になる。したがって $f(\alpha), f(\alpha+1), \dots, f(\alpha+k-1)$ が等差数列となる条件は、 $g(\alpha), g(\alpha+1), \dots, g(\alpha+k-1)$ が等差数列となる条件と同じである。

連続する数列が等差数列であることは、隣り合う 3 項の二階差がすべて 0 であることと同値である。つまり $g(x+2) - 2g(x+1) + g(x) = 0$ を、必要なすべての x でみたせばよい。

ここで実際に計算する。 $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ だから、 $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$ より、二階差 $g(x+2) - 2g(x+1) + g(x)$ は $x = 0, 1, 2$ で 0 になる。また、 g は最高次係数 1 の 5 次式なので、この二階差は最高次係数 $5 \cdot 4 = 20$ の 3 次式である。したがって $g(x+2) - 2g(x+1) + g(x) = 20x(x-1)(x-2)$ である。

よって k 項 $g(\alpha), g(\alpha+1), \dots, g(\alpha+k-1)$ が等差数列になるためには、 $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+k-3$ がすべて 0, 1, 2 のいずれかでなければならない。

$k = 3$ のときは、調べる値は α だけなので $\alpha = 0, 1, 2$ である。

$k = 4$ のときは、 α と $\alpha+1$ がともに 0, 1, 2 のいずれかでなければならないので $\alpha = 0, 1$ である。

$k = 5$ のときは、 $\alpha, \alpha+1, \alpha+2$ がすべて 0, 1, 2 に入る必要があるので $\alpha = 0$ である。

$k \geq 6$ のときは、 $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+k-3$ が 4 個以上の連続する実数を含むため、それらが 3 個の数 0, 1, 2 の中にすべて入ることはできない。したがって不可能である。

以上より、求める組は $(\alpha, k) = (0, 3), (1, 3), (2, 3), (0, 4), (1, 4), (0, 5)$ である。

【総評】 値が等差数列になる条件を、多項式の零点と二階差分に結びつける問題である。目安時間は 25 分。(1) は「0 から 4 で一致する最高次係数 1 の 5 次式は一意」という見方を使うと簡潔に書ける。(2) では $lx + m$ の部分を早めに切り離し、 g の二階差だけに集中するのが核心である。 k 項が等差数列になるには二階差を $k-2$ 箇所で確認する必要があるため、調べる点が α から $\alpha+k-3$ までになる点を落とさないようにしたい。

【第 5 問】

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、1 回目に出る目を l 、2 回目に出る目を m 、3 回目に出る目を n で表すことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 極限值

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が存在する確率を求めよ。

(2) 関数

$$f(x) = \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が、 $x > -1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。

【方針】

(1) は分母 $x+1$ が 0 になる $x = -1$ で、分子も 0 になることが極限存在の必要十分条件である。 $l-m+n=0$ を $m=l+n$ として、 m がさいころの目に収まる組を数える。(2) は割り算で $f(x) = lx + (m-l) + (l-m+n)/(x+1)$ とし、導関数の符号変化を調べる。 $x > -1$ で極値をもつ条件は $l-m+n > 0$ 、すなわち $m < l+n$ であり、補集合 $m \geq l+n$ を数えると整理しやすい。

【解答】

(1) 極限 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$ が有限の値として存在するためには、分母が 0 になる $x = -1$ で分子も 0 になり、分子が $x+1$ で割り切れる必要がある。

分子に $x = -1$ を代入すると $l(-1)^2 + m(-1) + n = l - m + n$ である。したがって条件は $l - m + n = 0$ すなわち $m = l + n$ である。

l, n はそれぞれ 1 から 6 までの整数であり、さらに m もさいころの目なので $l+n \leq 6$ が必要である。和 $l+n$ が 2, 3, 4, 5, 6 のとき、 (l, n) の個数はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 通りである。したがって有利な場合は $1+2+3+4+5 = 15$ 通りである。

全事象は $6^3 = 216$ 通りで等確率だから、求める確率は $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$ である。

(2) まず分子を $x+1$ で割ると $lx^2 + mx + n = (x+1)\{lx + (m-l)\} + (l-m+n)$ である。したがって $f(x) = lx + (m-l) + \frac{l-m+n}{x+1}$ となる。

よって、 $x > -1$ での導関数は $f'(x) = l - \frac{l-m+n}{(x+1)^2}$ である。ここで $l > 0$ であることに注意する。

$l-m+n > 0$ のとき、方程式 $f'(x) = 0$ は $(x+1)^2 = \frac{l-m+n}{l}$ となる。 $x > -1$ では $x+1 > 0$ なので、解は $x = -1 + \sqrt{\frac{l-m+n}{l}}$ の 1 つだけである。また、 x が -1 に右から近づくと $f'(x) < 0$ 、 x が十分大きいと $f'(x) > 0$ となるので、この点で $f'(x)$ は負から正に変わる。したがって $f(x)$ は $x > -1$ の範囲で極小値をとる。

一方、 $l-m+n = 0$ のときは $f'(x) = l > 0$ であり、極値をとらない。 $l-m+n < 0$ のときは $f'(x) = l + \frac{m-l-n}{(x+1)^2} > 0$ であり、やはり極値をとらない。

以上より、 $x > -1$ で極値をとるための必要十分条件は $l-m+n > 0$ すなわち $m < l+n$ である。

この条件をみたさない場合、つまり $m \geq l+n$ を数える。 $l+n = s$ とおくと、 $m \geq s$ が可能なのは $s = 2, 3, 4, 5, 6$ のときだけである。各 s について、 (l, n) の個数は $s-1$ 通り、 m の個数は $s, s+1, \dots, 6$ の $7-s$ 通りである。したがって不利な場合の数は $1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 35$ である。

よって有利な場合の数は $216 - 35 = 181$ 通りであり、求める確率は $\frac{181}{216}$ である。

【総評】 有理関数の極限条件と極値条件を、さいころの目の不等式に変換する問題である。目安時間は 18 分。(1) では $x = -1$ で分子が 0 になることが必要十分であると書けるかが入口で、 $m = l+n$ のあと $m \leq 6$ を忘れないことが重要である。(2) は $f'(x) = 0$ の解が存在するだけでなく、 $x > -1$ の範囲で導関数が負から正へ変わることを確認して初めて極値条件が完成する。数え上げは補集合 $m \geq l+n$ を和 $s = l+n$ で分類すると、境界の $s = 6$ までを漏れなく処理できる。