

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2015 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$$

を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

第 2 問

実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

第 3 問

以下の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ.
- (2) $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする. そのとき, $p = q = 0$ であることを示せ.

第 4 問

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある. P, Q は時刻 0 において, 原点を出発する. P は x 軸の正の方向に, Q は x 軸の負の方向に, ともに速さ 1 で動く. その後, ともに時刻 1 で停止する. 点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし, 空間で $x \geq -1$ の部分を C とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) $V(t)$ の最大値を求めよ.

第 5 問

n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行， $\dots$ ，左から第 1 列，第 2 列， $\dots$ ，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n - 1$ までのどの整数 i, j についても，第 i 行，第 $i + 1$ 行と第 j 列，第 $j + 1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列
第 1 行	0	1	0	0
第 2 行	1	0	1	1
第 3 行	0	1	0	0
第 4 行	1	0	1	1

($n = 4$) の場合の入れ方の例

- (1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．
- (2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)