

大阪大学 2015 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$$

を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

【方針】

積分区間が $[0, n]$ のままでは n に依存して扱いにくいので、 $x = nu$ と置いて区間を $[0, 1]$ に固定する。すると I_n は $\frac{nu}{1+nu} \log(1+u)$ の積分になる。(1) は係数 $\frac{nu}{1+nu} \leq 1$ から従う。(2) は固定された極限候補

$$\int_0^1 \log(1+u) du$$

との差を

$$\int_0^1 \frac{\log(1+u)}{1+nu} du$$

と表し、問題文の $\log(1+u) \leq \log 2$ と $\log x/x \rightarrow 0$ で挟み込む。

【解答】

(1) $x = nu$ とおくと、 $x = 0$ のとき $u = 0$ 、 $x = n$ のとき $u = 1$ 、 また $dx = n du$ である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^n f_n(x) dx &= \int_0^1 \frac{nu}{n(1+nu)} \log(1+u) n du \\ &= \int_0^1 \frac{nu}{1+nu} \log(1+u) du \end{aligned}$$

である。 $0 \leq u \leq 1$ では $0 \leq \frac{nu}{1+nu} \leq 1$ であり、 また $\log(1+u) \geq 0$ である。よって $\frac{nu}{1+nu} \log(1+u) \leq \log(1+u)$ である。両辺を $0 \leq u \leq 1$ で積分して

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$$

を得る。最後の積分変数は名前を u から x に戻しただけである。

(2)

(1) の置換表示より

$$I_n = \int_0^1 \frac{nu}{1+nu} \log(1+u) du$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+u) du - I_n &= \int_0^1 \left(1 - \frac{nu}{1+nu}\right) \log(1+u) du \\ &= \int_0^1 \frac{\log(1+u)}{1+nu} du\end{aligned}$$

である。右辺は非負である。

問題文の指示通り、 $0 \leq u \leq 1$ で $\log(1+u) \leq \log 2$ を用いると

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\log(1+u)}{1+nu} du \leq \log 2 \int_0^1 \frac{du}{1+nu}$$

である。右端を計算すると

$$\int_0^1 \frac{du}{1+nu} = \left[\frac{1}{n} \log(1+nu) \right]_0^1 = \frac{1}{n} \log(n+1)$$

であるから、

$$0 \leq \int_0^1 \log(1+u) du - I_n \leq \frac{\log 2}{n} \log(n+1)$$

である。

ここで $\frac{\log(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\log(n+1)}{n+1}$ であり、問題文で与えられた $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ から $\frac{\log(n+1)}{n} \rightarrow 0$ である。よってさきうちにより

$$\int_0^1 \log(1+u) du - I_n \rightarrow 0$$

である。したがって I_n は収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \log(1+u) du$$

である。

最後にこの積分を計算する。 $v = 1+u$ とおくと

$$\int_0^1 \log(1+u) du = \int_1^2 \log v dv$$

である。部分積分より

$$\int \log v dv = v \log v - v$$

だから

$$\int_1^2 \log v dv = (2 \log 2 - 2) - (1 \cdot 0 - 1) = 2 \log 2 - 1$$

である。ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2 \log 2 - 1$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。 $x = nu$ によって区間を $[0, 1]$ に固定するのが全体の入口である。(1) は係数 $nu/(1+nu)$ が 0 以上 1 以下であること、(2) は極限候補との差を正の積分として取り出すことが採点点になる。問題文が $\log(1+x) \leq \log 2$ の利用を指定しているため、差の評価でその上界を明示する。最後の $\log(n+1)/n \rightarrow 0$ は与えられた極限から一行で確認でき、積分値 $2 \log 2 - 1$ まで計算して完答となる。

【第 2 問】

実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

平方根が非負であることを保つため、まず $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ から $x = \sin \alpha, y = \sin \beta$ と置く。角を $-\pi/2 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ に取れば $\sqrt{1-x^2} = \cos \alpha, \sqrt{1-y^2} = \cos \beta$ とでき、与式は加法定理で $\sin^2(\alpha + \beta)$ にまとまる。

【解答】

与えられた式を $F = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とおく。 $|x| \leq 1$ であるから、

$$x = \sin \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表せる。同様に

$$y = \sin \beta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表せる。この範囲では $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$ であるから、

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \cos \alpha, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos \beta$$

である。

これを F に代入すると

$$\begin{aligned} F &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2\sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + 2\sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 \\ &= \sin^2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

となる。したがって、任意の実数 $\alpha + \beta$ に対して $0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1$ であるから、 $0 \leq F \leq 1$ が成り立つ。

▶ 解法 2 (2 つの平方への変形)

【方針】

与式そのものを 1 つの平方にして下限を示し、1 から与式を引いたものも別の平方にして上限を示す。三角置換を用いず、2 つの非負性を直接確認する。

【解答】

三角置換を使わず、平方の形で示すこともできる。まず

$$\begin{aligned} F &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= \{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}^2 \end{aligned}$$

である。よって $F \geq 0$ である。

また

$$\begin{aligned} 1-F &= 1-x^2-y^2+2x^2y^2-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= \{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\}^2 \end{aligned}$$

である。よって $1-F \geq 0$ 、すなわち $F \leq 1$ である。したがって同じく $0 \leq F \leq 1$ が従う。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 15 分。第 1 解法は平方根の符号を保つ範囲で三角置換し、加法定理から $\sin^2(\alpha + \beta)$ へまとめる。第 2 解法は与式と 1 との差をそれぞれ平方へ直し、上下限を直接示す。2 つの方法が等号条件の理解にもつながる。

【第 3 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。
 (2) $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき、 $p = q = 0$ であることを示せ。

【方針】

(1) は有理数と仮定して既約分数で表し、平方・立方の割り切りから分子分母が同時に割り切れる矛盾を出す。(2) は $r = \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ と置き、 $q \neq 0$ なら $\sqrt[3]{3} = A + B\sqrt{2}$ と書けることを利用する。これを 3 乗して有理部分と $\sqrt{2}$ の部分に分け、 $\sqrt{2}$ の無理性から係数が 0 になることを示す。最後に $q = 0$ 後の p も $\sqrt{2}$ の無理性で排除する。

【解答】

(1)

まず $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。このとき互いに素な正の整数 m, n を用いて $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ と書ける。両辺を 2 乗して $m^2 = 2n^2$ を得る。よって m^2 は偶数であり、したがって m も偶数である。 $m = 2r$ とおくと $4r^2 = 2n^2$, $n^2 = 2r^2$ となるので、同様に n も偶数である。これは m, n が互いに素であることに反する。したがって $\sqrt{2}$ は無理数である。

次に $\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定する。このとき互いに素な正の整数 m, n を用いて $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ と書ける。両辺を 3 乗して $m^3 = 3n^3$ を得る。よって m^3 は 3 で割り切れるので、 m も 3 で割り切れる。 $m = 3r$ とおくと $27r^3 = 3n^3$, $n^3 = 9r^3$ となる。したがって n^3 も 3 で割り切れ、 n も 3 で割り切れる。これは m, n が互いに素であることに反する。したがって $\sqrt[3]{3}$ は無理数である。

(2) $r = \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ とおく。仮定より p, q, r はすべて有理数である。

まず $q \neq 0$ と仮定して矛盾を導く。このとき $\sqrt[3]{3} = \frac{r - \sqrt{2}p}{q} = \frac{r}{q} - \frac{p}{q}\sqrt{2}$ である。したがって、有理数 A, B を用いて $\sqrt[3]{3} = A + B\sqrt{2}$ と書ける。

両辺を 3 乗する。左辺の 3 乗は 3 であり、右辺は

$$\begin{aligned}(A + B\sqrt{2})^3 &= A^3 + 3A^2B\sqrt{2} + 3A(B\sqrt{2})^2 + (B\sqrt{2})^3 \\ &= A^3 + 6AB^2 + (3A^2B + 2B^3)\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。よって $3 = A^3 + 6AB^2 + (3A^2B + 2B^3)\sqrt{2}$ となる。

もし $3A^2B + 2B^3 \neq 0$ なら、上の等式から $\sqrt{2}$ が有理数として表されてしまい、(1) に反する。したがって $3A^2B + 2B^3 = 0$ でなければならない。これは $B(3A^2 + 2B^2) = 0$ である。 $3A^2 + 2B^2 \geq 0$ であり、これが 0 になるのは $A = B = 0$ のときだけであるから、結局 $B = 0$ である。すると $\sqrt[3]{3} = A$ となり、 $\sqrt[3]{3}$ が有理数になってしまう。これは (1) に反する。

よって $q \neq 0$ は不可能であり、 $q = 0$ である。このとき $r = \sqrt{2}p$ である。もし $p \neq 0$ なら $\sqrt{2} = \frac{r}{p}$ となって $\sqrt{2}$ が有理数になり、(1) に反する。したがって $p = 0$ である。

以上より $p = q = 0$ が示された。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 20 分。(1) は既約分数と仮定する標準証明だが、 $\sqrt[3]{3}$ では $m^3 = 3n^3$ から m, n がともに 3 で割り切れるところまで丁寧に書く。(2) は $q \neq 0$ と仮定して $\sqrt[3]{3} = A + B\sqrt{2}$ の形へ移すのが核心である。3 乗後、 $\sqrt{2}$ の係数が 0 でなければ $\sqrt{2}$ が有理数になる、という論理を明示する必要がある。最後に $q = 0$ だけで止めず、 $p = 0$ も無理性で処理する。

【第 4 問】

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある. P, Q は時刻 0 において、原点を出発する. P は x 軸の正の方向に、 Q は x 軸の負の方向に、ともに速さ 1 で動く. その後、ともに時刻 1 で停止する. 点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし、空間で $x \geq -1$ の部分を C とする. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) $V(t)$ の最大値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

時刻 t で 2 球の中心は $(t, 0, 0), (-t, 0, 0)$ である. 球 A は半空間 $C: x \geq -1$ に全て含まれ、球 B は左端の高さ t の球冠だけが C からはみ出す. さらに 2 球の共通部分は、中心間距離 $2t$ から高さ $1-t$ の球冠 2 つ分であり、これはすべて C 内にある. 包除原理で $V(t)$ を出し、微分で最大値を求める.

【解答】

(1)

時刻 t において、球 A の中心は $(t, 0, 0)$ であり、球 B の中心は $(-t, 0, 0)$ である. ただし $0 \leq t \leq 1$ である.

まず球 A について考える. 球 A の最も左の点の x 座標は $t-1 \geq -1$ であるから、球 A はすべて $C: x \geq -1$ に含まれる. したがって $\text{vol}(A \cap C) = \frac{4\pi}{3}$ である.

次に球 B を考える. 球 B の中心は $(-t, 0, 0)$ で、平面 $x = -1$ は中心から左へ $1-t$ だけ離れている. したがって C からはみ出す部分は、球の左端から平面 $x = -1$ までの高さ t の球冠である. 半径 1 の球で高さ h の球冠の体積は $\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{3}\right)$

であるから、 $\text{vol}(B \cap C) = \frac{4\pi}{3} - \pi t^2 \left(1 - \frac{t}{3}\right)$ である.

次に $A \cap B$ の体積を求める. 2 つの球の中心間距離は $2t$ である. 2 球は同じ半径 1 なので、共通部分は、各球から見て高さ $1-t$ の球冠 2 つ分である. したがって $\text{vol}(A \cap B) = 2\pi(1-t)^2 \left(1 - \frac{1-t}{3}\right)$ である. また $A \cap B$ は球 A に含まれ、球 $A \subset C$ であるから、 $A \cap B$ はすべて C 内にある.

よって包除原理により

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{vol}(A \cap C) + \text{vol}(B \cap C) - \text{vol}(A \cap B) \\ &= \frac{4\pi}{3} + \left\{ \frac{4\pi}{3} - \pi t^2 \left(1 - \frac{t}{3}\right) \right\} - 2\pi(1-t)^2 \left(1 - \frac{1-t}{3}\right) \end{aligned}$$

である. 整理すると

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \left\{ \frac{8}{3} - t^2 + \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}(1-t)^2(2+t) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} + 2t - t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} (-t^3 - 3t^2 + 6t + 4) \end{aligned}$$

である.

(2)

(1) より $V(t) = \frac{\pi}{3} (-t^3 - 3t^2 + 6t + 4)$ である. 微分すると $V'(t) = \frac{\pi}{3} (-3t^2 - 6t + 6) = \pi(-t^2 - 2t + 2)$ である. したがって $V'(t) = 0$ は $t^2 + 2t - 2 = 0$ と同値であり、 $t = -1 \pm \sqrt{3}$ を得る. $0 \leq t \leq 1$ に入るのは $t = \sqrt{3} - 1$ だけである.

また $V'(0) = 2\pi > 0$, $V'(1) = -\pi < 0$ であり、 $V'(t)$ は $t = \sqrt{3} - 1$ で正から負に変わる. よって最大はこのときである. $t = \sqrt{3} - 1$ を代入する. $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$, $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$ であるから、

$$\begin{aligned} V(\sqrt{3} - 1) &= \frac{\pi}{3} \{ -(6\sqrt{3} - 10) - 3(4 - 2\sqrt{3}) + 6(\sqrt{3} - 1) + 4 \} \\ &= \frac{\pi}{3} (6\sqrt{3} - 4) \\ &= \frac{2\pi(3\sqrt{3} - 2)}{3} \end{aligned}$$

である.

▶ 解法 2 (垂直断面の積分)

【方針】

x 一定の断面では 2 球が同心円盤になることを使い、和集合の断面積を大きい方の円盤として左右 2 区間で積分する。得た $V(t)$ を微分し、最大値まで求める。

【解答】

(1)

固定した x における 2 球の断面は、 yz 平面内で中心を共有する円盤になる。 $x \leq 0$ では中心が $-t$ の球 B の断面半径が大きく、 $x \geq 0$ では中心が t の球 A の断面半径が大きい。また半空間 C により $x \geq -1$ に限られる。よって

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_{-1}^0 \{1 - (x+t)^2\} dx + \pi \int_0^{t+1} \{1 - (x-t)^2\} dx \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} + t - t^2 \right) + \pi \left(\frac{2}{3} + t - \frac{t^3}{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} + 2t - t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \end{aligned}$$

である。

(2)

微分すると

$$V'(t) = \pi(-t^2 - 2t + 2)$$

である。 $0 \leq t \leq 1$ では $t = \sqrt{3} - 1$ の前で正、後で負となるので、ここで最大となる。したがって

$$\max V(t) = V(\sqrt{3} - 1) = \frac{2\pi(3\sqrt{3} - 2)}{3}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 25 分。第 1 解法は球冠体積と包除原理、第 2 解法は x に垂直な断面積の積分を使う。後者では 2 つの断面円盤が同心で、 $x = 0$ を境に大きい方が入れ替わることが核心である。2 経路で同じ 3 次式を得て最大値も照合できる。

【第 5 問】

n を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行、第 2 行、...、左から第 1 列、第 2 列、...、と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。条件 p : 1 から $n-1$ までのどの整数 i, j についても、第 i 行、第 $i+1$ 行と第 j 列、第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	
第 1 行	0	1	0	0	
第 2 行	1	0	1	1	
第 3 行	0	1	0	0	第 3 列
第 4 行	1	0	1	1	

($n = 4$) の場合の入れ方の例

- (1) 条件 p を満たすとき、第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。
- (2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。

【方針】

隣り合う 2 行を固定し、各列で上下 2 マスの和 u_j を見る。条件 p は隣接する u_j, u_{j+1} に対して $u_j + u_{j+1} = 2$ と言い換えられるので、 u_j はすべて 1 であるか、0, 2 が交互に並ぶかのどちらかである。前者は隣接 2 行が列ごとに反対、後者はその 2 行が同じ交互行であることを意味する。これを全ての隣接行に伝播させ、全行交互型または全列交互型に分類する。(1) はこの分類から従い、(2) は 2 種類を数えて重複する市松模様 2 通りを引く。

【解答】

(1)

各マスに入っている数を a_{ij} と書く。ただし a_{ij} は第 i 行第 j 列の数であり、0 または 1 である。

隣り合う 2 行、第 i 行と第 $i+1$ 行を固定する。第 j 列にあるこの 2 つの数の和を $u_j = a_{ij} + a_{i+1,j}$ とおく。 u_j は 0, 1, 2 のいずれかである。

条件 p より、第 i 行・第 $i+1$ 行と第 j 列・第 $j+1$ 列で作る 2×2 の 4 マスには、1 がちょうど 2 つ入る。したがって $u_j + u_{j+1} = 2$ である。これがすべての $j = 1, 2, \dots, n-1$ で成り立つ。

この関係から、 u_j の並びは次のどちらかである。

まず、ある j で $u_j = 1$ なら、 $u_{j+1} = 1$ であり、順にすべての u_j が 1 になる。この場合、第 i 行と第 $i+1$ 行は各列で互いに反対の数をもつ。

一方、ある j で $u_j = 0$ または 2 なら、関係式から u_j は 0, 2, 0, 2, ... または 2, 0, 2, 0, ... と交互に並ぶ。この場合、各列で上下の 2 数は等しく、しかも列を移るごとに 0, 1 が交互に現れる。つまり第 i 行と第 $i+1$ 行は、どちらも同じ交互行である。

したがって、任意の隣接 2 行について、次のどちらかが成り立つ。(A) 2 行は列ごとに互いに反対である または (B) 2 行はどちらも同じ交互行である。もし、ある隣接 2 行について (B) が成り立つなら、そのうち一方の行は交互行である。その隣の行は、(A) なら交互行の反対なのでやはり交互行、(B) なら同じ交互行である。これを上下に繰り返すと、すべての行に 0 と 1 が交互に現れる。したがって特に第 n 行に 0 と 1 が交互に現れる。

一方、どの隣接 2 行についても (B) が起こらず、すべて (A) であるとする。このとき、各列では行を 1 つ下がるごとに数が反対になる。したがってすべての列に 0 と 1 が交互に現れる。特に第 n 列に 0 と 1 が交互に現れる。

以上より、条件 p を満たすとき、第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる。

(2)

(1) の議論から、条件 p を満たす入れ方は次の 2 種類のどちらかである。すべての行に 0 と 1 が交互に現れる入れ方 または すべての列に 0 と 1 が交互に現れる入れ方 である。逆に、このどちらかを満たす入れ方では、任意の隣接する 2×2 の 4 マスに 0 と 1 が 2 つずつ入るので、条件 p を満たす。

まず、すべての行が交互である入れ方を数える。各行について、左端の第 1 列の数を 0 にするか 1 にするかを決めれば、その行全体は一意に決まる。したがって 2^n 通りである。

同様に、すべての列が交互である入れ方も、各列の第 1 行の数を決めればその列全体が一意に決まるので 2^n 通りである。

ただし、この 2 つの種類に重複して数えられる入れ方がある。それは、すべての行もすべての列も交互である入れ方である。この場合、第 1 行第 1 列の数を決めれば盤面全体が市松模様として一意に決まるので、重複は 2 通りである。

よって求める総数は $a_n = 2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$ である。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。局所的な 2×2 条件を、隣接 2 行の列ごとの和 u_j に変換するのが核心である。 $u_j + u_{j+1} = 2$ から「列ごとに反対」または「同じ交互行」の 2 型に分かれ、それを上下へ伝播させると全行交互型・全列交互型の分類が得られる。(1) は分類の帰結であり、(2) は分類が必要十分であることを確認してから数える。最後に両方に属する市松模様 2 通りを引き忘れないことが、最も起こりやすいミスである。原典の 4×4 配置例を復元し、第 2 行・第 3 列・中央の 2×2 ブロックを色分けした。