

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2016 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し, 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件 (ア), (イ), (ウ) で定める.

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

以下の問いに答えよ.

(1) $a = 2, b = 3$ のとき, $f_5(0)$ を求めよ.

(2) $a = 1, b = 6$ のとき, $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ.

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて, 1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b とするとき, $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ.

第 2 問

次の問いに答えよ.

- (1) c を正の定数とする. 正の実数 x, y が $x + y = c$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ.

- (2) 正の実数 x, y, z が $x + y + z = 1$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ.

第 3 問

座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする．

(1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を， x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

第 4 問

正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき、1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする.

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき、 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ.

(2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ.

(3) 整数 a と $0 \leq b < 1$ をみたす実数 b を用いて,

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき、 b の値を求めよ.

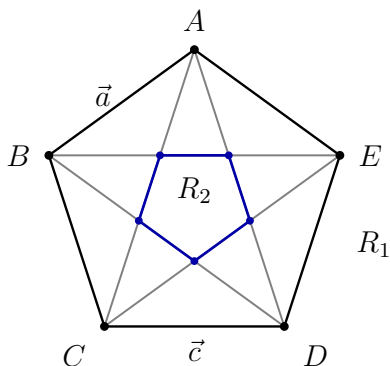
第 5 問

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している．5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする． $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ とおき， $\vec{a}$ の大きさを x とする．

- (1) $\overrightarrow{AC}$ の大きさを y とするとき， $x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ．
- (2) $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}$ ， $\vec{c}$ を用いて表せ．
- (3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする． R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して， R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし， R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)