

大阪大学 2016 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し、関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件 (ア), (イ), (ウ) で定める。

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

以下の問いに答えよ。

(1) $a = 2, b = 3$ のとき、 $f_5(0)$ を求めよ。

(2) $a = 1, b = 6$ のとき、 $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b とするとき、 $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

文系第 3 問と同じく $h = 1/a + 1/b$ とおき、帰納的に $f_{2k}(x) = \sin\{\pi(kh - x)\}$, $f_{2k+1}(x) = \sin\{\pi(kh + x)\}$ を得る。これにより (1) と (3) は $\sin(k\pi h)$ の評価と整数条件に帰着する。(2) は $a = 1, b = 6$ で $h = 7/6$ なので、 $(-1)^k \sin(7k\pi/6)$ の周期 12 を使う。100 項は 12 項周期 8 回と 4 項に分け、1 周期の和が 0 であることを確認して残りだけ足す。

【解答】

$h = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ とおく。定義から $f_2(x) = \sin \pi(h - x)$, $f_3(x) = \sin \pi(h + x)$ である。これを繰り返すと、正の整数 k について $f_{2k}(x) = \sin\{\pi(kh - x)\}$, $f_{2k+1}(x) = \sin\{\pi(kh + x)\}$ が成り立つ。したがって $f_{2k}(0) = f_{2k+1}(0) = \sin(k\pi h)$ である。

(1) $a = 2, b = 3$ のとき $h = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ である。よって $f_5(0) = \sin(2\pi h) = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(2) $a = 1, b = 6$ のとき $h = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ であるから、求める和は $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k \sin \frac{7k\pi}{6}$ である。 $\sin(7k\pi/6)$ は k について周期 12 をもち、 $(-1)^k$ も周期 2 をもつので、積全体は周期 12 をもつ。

1 周期分の和は $\sum_{k=1}^{12} (-1)^k \sin \frac{7k\pi}{6} = 0$ である。実際、 k と $k+6$ の項は

$$(-1)^{k+6} \sin\left(\frac{7k\pi}{6} + 7\pi\right) = -(-1)^k \sin \frac{7k\pi}{6}$$

となり、互いに打ち消し合う。 $100 = 12 \cdot 8 + 4$ なので、最初の 4 項だけを足せばよい。したがって

$$\begin{aligned} & -\sin \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{2} + \sin \frac{14\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(3) $f_6(0)$ は $2k = 6$, すなわち $k = 3$ の場合なので $f_6(0) = \sin(3\pi h) = \sin \pi \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b}\right)$ である。したがって $f_6(0) = 0$ となる条件は $\frac{3}{a} + \frac{3}{b}$ が整数であること。 $1 \leq a, b \leq 6$ でこれを満たす順序付きの組は $(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (6, 2), (6, 6)$ の 8 通りである。全事象は 36 通りなので、求める確率は $\frac{2}{9}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

定義 (イ) (ウ) を合成して、奇数番の関数が引数の平行移動で得られることを示す。(2) では $(-1)^k$ を正弦の位相 $k\pi$ へ吸収すると、和が $\sum \sin(k\pi/6)$ へ簡単化する。(3) は $3/a$ の小数部分だけを分類して数える。

【解答】

$h = 1/a + 1/b$ とおく。定義より

$$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) = f_{2n-1}(h+x)$$

である。したがって $f_1(x) = \sin \pi x$ から帰納的に

$$f_{2n+1}(x) = \sin \pi(x + nh), \quad f_{2n}(x) = \sin \pi(nh - x) \quad (1)$$

を得る。

(1) $a = 2, b = 3$ では $h = 5/6$ だから

$$f_5(0) = \sin(2\pi h) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $a = 1, b = 6$ では $h = 7/6$ である。(1) より求める和は

$$\sum_{k=1}^{100} (-1)^k \sin \frac{7k\pi}{6}$$

である。整数 k について

$$(-1)^k \sin \frac{7k\pi}{6} = \sin \left(\frac{7k\pi}{6} + k\pi \right) = \sin \frac{k\pi}{6}$$

となる。この数列は周期 12 で、1 周期の和は 0 である。 $100 = 12 \cdot 8 + 4$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \sin \frac{k\pi}{6} &= \sum_{k=1}^4 \sin \frac{k\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(3) $f_6(0) = 0$ の条件は $3/a + 3/b$ が整数になることである。 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対する $3/a$ の小数部分は

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{2}.$$

和が整数になるのは a, b がともに $\{1, 3\}$ に属する場合、またはともに $\{2, 6\}$ に属する場合で、合計 8 通りである。したがって確率は

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 6。目安時間は 22 分。最初に $f_{2k}(0) = f_{2k+1}(0) = \sin(k\pi h)$ を作れば、3 つの小問はすべて同じ型で処理できる。(2) は 100 項を力任せに扱うのではなく、 $(-1)^k \sin(7k\pi/6)$ の周期 12 と、 k と $k+6$ の打ち消しを使うと安全である。(3) は順序付きの 36 通りから数えるので、左右を入れ替えた組も別に数える。

【第 2 問】

次の問いに答えよ。

- (1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x + y = c$ をみたすとき、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ。

- (2) 正の実数 x, y, z が $x + y + z = 1$ をみたすとき、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $x + y = c$ のもとで $xy \leq c^2/4$ を使う。式は $1 + (c+1)/(xy)$ なので、最小値は xy が最大のとき、すなわち $x = y = c/2$ で取る。(2) は z を固定して $x + y = 1 - z$ とし、(1) を適用する。ただし第 3 因子 $1 - 4/(3z)$ は $0 < z < 1$ で負なので、積を最大にするには前半 2 因子を最小にする必要がある。よって $x = y = (1 - z)/2$ に絞り、残った 1 変数関数を微分して最大値を求める。

【解答】

- (1) $x + y = c$ であるから

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 + \frac{x + y + 1}{xy} = 1 + \frac{c + 1}{xy}$$

である。正の実数 x, y について、和が c に固定されているとき $xy \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2$ であり、等号は $x = y = c/2$ のときに成り立つ。したがって $(c + 1)/(xy)$ は xy が最大のときに最小となるので、求める最小値は $1 + \frac{c + 1}{c^2/4} = 1 + \frac{4(c + 1)}{c^2}$ である。

- (2) z を固定する。 $0 < z < 1$ であり、 $x + y = 1 - z$ である。(1) を $c = 1 - z$ として用いると、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 1 + \frac{4(2 - z)}{(1 - z)^2}$$

であり、等号は $x = y = \frac{1 - z}{2}$ のときに成り立つ。

一方、 $0 < z < 1$ では $1 - \frac{4}{3z} < 0$ である。したがって全体の積を最大にするには、正である前半 2 因子の積をできるだけ小さくすればよい。よって最大値の候補は $x = y = \frac{1 - z}{2}$ のときに得られる。

このとき与式の値を $F(z)$ とすると

$$\begin{aligned} F(z) &= \left\{1 + \frac{4(2 - z)}{(1 - z)^2}\right\} \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \\ &= \frac{(z - 3)^2(3z - 4)}{3z(z - 1)^2} \end{aligned}$$

である。 $0 < z < 1$ で微分すると $F'(z) = \frac{4(z - 3)(2z - 3)(2z - 1)}{3z^2(z - 1)^3}$ である。 $0 < z < 1$ では $z - 3 < 0$, $2z - 3 < 0$, $z - 1 < 0$ なので、 $F'(z)$ の符号は $z = 1/2$ を境に正から負へ変わる。したがって $F(z)$ は $z = 1/2$ で最大となる。

よって最大値は

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{1 + \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{(1/2)^2}\right\} \left(1 - \frac{4}{3/2}\right) = 25 \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{3}$$

である。このとき $z = \frac{1}{2}$, $x = y = \frac{1}{4}$ で等号が成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は相加相乗平均から $1/x + 1/y$ と $1/(xy)$ を同時に評価する。(2) は負号を外して正の式の最小値問題へ変換し、まず (1) の等号条件で $x = y$ に絞る。残る z の式は、目標値との差を平方因子へ分解して微分せずに評価する。

【解答】

(1) $x + y = c$ より

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c}{xy}.$$

また相加相乗平均から $xy \leq c^2/4$ なので

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{c}, \quad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{c^2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \\ &\geq 1 + \frac{4}{c} + \frac{4}{c^2} = 1 + \frac{4(c+1)}{c^2}. \end{aligned}$$

等号は $x = y = c/2$ のときに成り立つ。

(2) 与式を P とする。 $0 < z < 1$ なので

$$P = - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \frac{4-3z}{3z}.$$

ここで $x + y = 1 - z$ だから、(1) より

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{(3-z)^2}{(1-z)^2},$$

等号は $x = y = (1-z)/2$ で成り立つ。 $(4-3z)/(3z) > 0$ より

$$-P \geq \frac{(3-z)^2(4-3z)}{3z(1-z)^2}.$$

さらに

$$\frac{(3-z)^2(4-3z)}{3z(1-z)^2} - \frac{125}{3} = \frac{4(2z-1)^2(9-8z)}{3z(1-z)^2} \geq 0$$

である。したがって $-P \geq 125/3$ 、すなわち

$$P \leq -\frac{125}{3}.$$

等号は $z = 1/2$ かつ $x = y = (1-z)/2 = 1/4$ のときに成り立つので、これが最大値である。

【総評】 難度 6，計算量 5。目安時間は 22 分。(1) は固定和のもとで積 xy が最大になる点を使う基本問題。(2) の落とし穴は、 $1-4/(3z)$ が $0 < z < 1$ で負になることにより、不等式の利用方向が反転する点である。固定した z で $x = y$ に絞った後は 1 変数の微分だが、端点では値が $-\infty$ へ向かうので、 $z = 1/2$ の極大が最大値になる。等号条件 $(x, y, z) = (1/4, 1/4, 1/2)$ も書くと完成度が高い。

【第 3 問】

座標平面において、原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ は、ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする。

(1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は放物線上の点 $(x, \sqrt{2}(x-1)^2)$ と原点の距離の 2 乗 $g(x) = x^2 + 2(x-1)^4$ を最小化する。円がただ 1 つの共有点をもつには、半径がこの最小距離に等しい必要がある。微分すると $g'(x) = 2(2x-1)(2x^2-5x+4)$ で、後ろの 2 次式は常に正なので最小点は $x = 1/2$ だけである。(2) は x 軸回転の断面で、放物線上端の半径の 2 乗から、円の内部を除く部分だけ $r^2 - x^2$ を引く。円が存在する $x \leq r$ とそれ以後で積分を分ける。

【解答】

(1) 放物線上の点を $(x, \sqrt{2}(x-1)^2)$ とおく。この点と原点との距離の 2 乗を $g(x) = x^2 + 2(x-1)^4$ とする。円は原点を中心とするので、放物線と円がただ 1 つの共有点をもつためには、 r^2 が $g(x)$ の最小値に等しければよい。

微分すると $g'(x) = 2x + 8(x-1)^3 = 2(2x-1)(2x^2-5x+4)$ である。ここで $2x^2-5x+4$ の判別式は $25-32 < 0$ で、係数の先頭は正だから、常に正である。したがって $g'(x)$ の符号は $2x-1$ の符号で決まり、 $x = 1/2$ で最小となる。

よって共有点は $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ である。また $r^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ より $r = \frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

したがって $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

(2) (1) より $a = 1/2$, $r^2 = 3/8$ である。領域は

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

で表される。 x を固定して x 軸のまわりに回転する。放物線の上端による外側半径の 2 乗は $\{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2 = 2(x-1)^4$ である。一方、円の内部を除く条件 $x^2 + y^2 \geq r^2$ により、 $x^2 < r^2$ の範囲では内側半径の 2 乗 $r^2 - x^2 = \frac{3}{8} - x^2$ を引く必要がある。 $x \geq r = \sqrt{6}/4$ では、 $x^2 \geq r^2$ なので円による除外はない。

したがって体積 V は

$$V = \pi \int_{1/2}^{\sqrt{6}/4} \left\{ 2(x-1)^4 - \left(\frac{3}{8} - x^2 \right) \right\} dx + \pi \int_{\sqrt{6}/4}^1 2(x-1)^4 dx$$

である。計算を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{1/2}^{\sqrt{6}/4} 2(x-1)^4 dx - \int_{1/2}^{\sqrt{6}/4} \left(\frac{3}{8} - x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{2(x-1)^5}{5} \right]_{1/2}^{\sqrt{6}/4} - \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^3}{3} \right]_{1/2}^{\sqrt{6}/4} \\ &= \frac{1}{80} - \left(\frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{7}{48} \right) \\ &= \frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16} \end{aligned}$$

である。したがって

$$V = \pi \left(\frac{19}{120} - \frac{\sqrt{6}}{16} \right) = \frac{\pi(38 - 15\sqrt{6})}{240}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は共有点で円と放物線の接線の傾きが一致することを用いる。(2) は放物線の下を回転してできる全体積から、円の内部に当たる部分を球冠として引く。積分区間を分ける方法とは別に、球冠の高さから体積を計算する。

【解答】

(1) 共有点 (a, b) では

$$b = \sqrt{2}(a - 1)^2 \quad (1)$$

である。共有点がただ 1 つなので、円と放物線はこの点で接する。放物線の接線ベクトルは

$$(1, 2\sqrt{2}(a - 1))$$

であり、円の法線ベクトルは (a, b) と平行である。両者が直交することから

$$a + 2\sqrt{2}b(a - 1) = 0$$

を得る。(1) を代入すると

$$4(a - 1)^3 + a = 0,$$

すなわち

$$(2a - 1)(2a^2 - 5a + 4) = 0$$

である。第 2 因子は判別式が -7 で常に正だから、 $a = 1/2$ だけが実数解である。よって

$$b = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

したがって

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad r = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

(2) 円の条件をいったん無視し、 $1/2 \leq x \leq 1$ で放物線の下を x 軸のまわりに回転した体積は

$$V_0 = \pi \int_{1/2}^1 2(x - 1)^4 dx = \frac{\pi}{80}$$

である。

ここから、球 $x^2 + y^2 \leq r^2$ のうち $1/2 \leq x \leq r$ にある球冠を除けばよい。球冠の高さは

$$h = r - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - 2}{4}$$

であり、半径 r 、高さ h の球冠の体積は $\pi h^2(r - h/3)$ だから

$$V_{\text{cap}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{7}{48} \right).$$

よって求める体積は

$$\begin{aligned} V &= V_0 - V_{\text{cap}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{80} + \frac{7}{48} - \frac{\sqrt{6}}{16} \right) \\ &= \frac{\pi(38 - 15\sqrt{6})}{240}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7, 計算量 7。目安時間は 28 分。(1) では円と放物線が 1 点だけで交わることを、原点から放物線への距離が最小になる点として読むのが自然である。 $g'(x)$ の因数分解で、 $2x^2 - 5x + 4$ が常に正であることを確認すると、最小点の一意性まで示せる。(2) は回転体の外側半径が放物線、内側半径が円になる区間を正しく分けることが重要。 $x \geq r$ では円の条件が自動的に満たされるため、余計に引かないように注意する。

【第 4 問】

正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき、1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

- (1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき、 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。
- (2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ。
- (3) 整数 a と $0 \leq b < 1$ をみたす実数 b を用いて、

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき、 b の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は各 k を $k = 2^e u$ (u 奇数) と分ける。 $e \leq N$ かつ u は A_n の因数なので $2^N A_n / k$ は整数であり、和全体も整数。奇偶は、 $e = N$ かつ $u = 1$ 、つまり $k = 2^N$ の項だけが奇数になることから示す。(2) は $20 S_n$ が整数と仮定し、 $N \geq 3$ なら $2^N A_n S_n$ が偶数になって (1) に矛盾することを使う。よって $n \leq 7$ を直接調べる。(3) は $16 A_{20} S_{20}$ を 16 で割った余りで調べ、小数部分を (余り)/16 として求める。

【解答】

(1) $1 \leq k \leq n$ を任意にとり、 $k = 2^e u$ と表す。ただし u は奇数である。 N は $\log_2 n$ 以下の最大の整数なので $2^N \leq n < 2^{N+1}$ である。したがって $k \leq n$ なら $e \leq N$ である。また u は $1 \leq u \leq n$ を満たす奇数なので、 A_n の因数である。

よって $\frac{2^N A_n}{k} = \frac{2^{N-e} A_n}{u}$ は整数である。したがって $2^N A_n S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^N A_n}{k}$ は整数である。

次に奇偶を調べる。上の項 $\frac{2^{N-e} A_n}{u}$ が奇数となるには、 $N - e = 0$ でなければならない。つまり $e = N$ である。このとき $k = 2^N u \leq n < 2^{N+1}$ だから、奇数 u は $u = 1$ に限られる。したがって奇数の項は $k = 2^N$ に対応する 1 項だけであり、他の項はすべて偶数である。

よって和 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数である。

(2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となるなら、 $20 S_n$ は整数である。もし $N \geq 3$ なら $n \geq 8$ であり、 A_n は奇数 5 を因数にもつ。このとき $2^N A_n S_n = \frac{2^{N-2} A_n (20 S_n)}{5}$ である。右辺は整数であり、しかも $N - 2 \neq 0$ なので偶数である。これは (1) で示した「奇数の整数」に反する。したがって $N \leq 2$ であり、 $n \leq 7$ である。

そこで $n = 1, 2, \dots, 7$ を調べる。 S_n は

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{6}, \quad \frac{25}{12}, \quad \frac{137}{60}, \quad \frac{49}{20}, \quad \frac{363}{140}$$

である。このうち $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ の形で m が正の整数になるのは $S_6 = \frac{49}{20} = 2 + \frac{9}{20}$ だけである。よって $(n, m) = (6, 9)$ である。

(3) $n = 20$ では $N = 4$ であるから、(1) より $16 A_{20} S_{20}$ は奇数の整数である。 $A_{20} S_{20}$ の小数部分を求めるには、この整数を 16 で割った余りを求めればよい。 $16 A_{20} S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \frac{16 A_{20}}{k}$ である。 k が奇数のとき、 k は A_{20} を割り切るので、 $16 A_{20} / k$ は 16 の倍数であり、16 で割った余りは 0 である。偶数 k について余りを調べると、

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{16 A_{20}}{k} \pmod{16}$	8	12	8	6	8	4	8	3	8	12

である。したがって $16 A_{20} S_{20} \equiv 8 + 12 + 8 + 6 + 8 + 4 + 8 + 3 + 8 + 12 \equiv 13 \pmod{16}$ である。

よってある整数 q を用いて $16 A_{20} S_{20} = 16q + 13$ と書ける。したがって $A_{20} S_{20} = q + \frac{13}{16}$ であり、求める小数部分は $\frac{13}{16}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) から S_n を既約分数にしたときの分母に含まれる 2 の最高冪がちょうど 2^N であることを読み取る。(2) は右辺の分母 20 と比較して $N \leq 2$ を得る。(3) は偶数 k を 2 で割れる回数ごとにまとめ、各項の小数部分だけを加える。

【解答】

(1) $k = 2^e u$ (u は奇数) と書く。 $k \leq n < 2^{N+1}$ より $e \leq N$ であり、奇数 $u \leq n$ は A_n の因数だから

$$\frac{2^N A_n}{k} = 2^{N-e} \frac{A_n}{u}$$

は整数である。したがって $2^N A_n S_n$ は整数である。この項が奇数になるのは $e = N$ のときだけであり、 $2^N u \leq n < 2^{N+1}$ からその場合は $u = 1$ 、すなわち $k = 2^N$ だけである。よって和には奇数項がちょうど 1 つあり、 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数である。

さらに $S_n = p/q$ を既約分数で表すと、 A_n は奇数であるから、上の奇数性は q に含まれる 2 の最高冪がちょうど 2^N であることも示している。

(2)

$$S_n = 2 + \frac{m}{20}$$

なら、既約化した分母に含まれる 2 の最高冪は高々 $4 = 2^2$ である。したがって (1) より $N \leq 2$ 、すなわち $n \leq 7$ である。 $n = 1, \dots, 7$ を調べると

$$S_1 = 1, S_2 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{11}{6}, S_4 = \frac{25}{12}, S_5 = \frac{137}{60}, S_6 = \frac{49}{20}, S_7 = \frac{363}{140}.$$

条件を満たすのは $S_6 = 2 + 9/20$ だけなので

$$(n, m) = (6, 9).$$

(3) $A = A_{20}$ と書く。奇数 k に対する A/k は整数なので、小数部分には寄与しない。偶数 $k = 2^e u$ を e ごとにまとめる。

$e = 1$ の 5 項 $k = 2, 6, 10, 14, 18$ では A/u が奇数なので、各項の小数部分は $1/2$ 、合計の小数部分は $1/2$ である。 $e = 2$ の $k = 4, 12, 20$ では小数部分が順に

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

となり、合計の小数部分は $3/4$ である。また

$$A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 19 \equiv 3 \pmod{16}$$

だから、 $k = 8$ の項の小数部分は $3/8$ 、 $k = 16$ の項の小数部分は $3/16$ である。

したがって全体の小数部分は

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} \equiv \frac{13}{16} \pmod{1}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。(1) は分母の 2 の指数と奇数部分を分ける問題で、整数性だけでなく「奇数性」まで示す必要がある。奇数になる項が $k = 2^N$ の 1 項だけであることを明確に書くのが重要。(2) は (1) の奇数性を利用する典型的な反証で、 $N \geq 3$ なら 5 が A_n に含まれる点を忘れない。(3) は合同計算の表を丁寧に作る問題で、 $16A_{20}S_{20}$ の余りがそのまま小数部分の分子になることを説明すると見通しがよい。

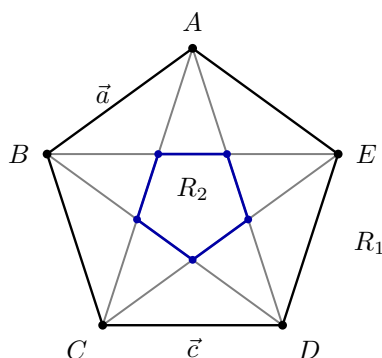
【第 5 問】

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ とおき、 $\vec{a}$ の大きさを x とする。

- (1) $\overrightarrow{AC}$ の大きさを y とするとき、 $x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ。
- (2) $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

(1) は円に内接する四角形 $ABCD$ に Ptolemy の定理を使い、辺 x と対角線 y の関係を出す。これにより黄金比 $\varphi = y/x = (1 + \sqrt{5})/2$ が得られる。(2) は辺ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が $\overrightarrow{BC}$ の方向に対して対称であることを使い、 $\vec{a} + \vec{c}$ が $\overrightarrow{BC}$ と同方向で、大きさが x/φ になることから $\overrightarrow{BC} = \varphi(\vec{a} + \vec{c})$ を得る。(3)(4) は五芒星内の相似から内側正五角形の一辺比が $1/\varphi^2$ であることを使い、面積比を等比級数にする。

【解答】

(1) 正五角形の一辺の長さは x , 対角線の長さは y である。円に内接する四角形 $ABCD$ に Ptolemy の定理を用いると、 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ である。ここで $AC = BD = AD = y$, $AB = BC = CD = x$ なので $y^2 = x^2 + xy$ となる。したがって $x^2 = y(y - x)$ である。

また、 $\varphi = y/x$ とおくと $\varphi^2 = 1 + \varphi$ であり、 $\varphi > 0$ より $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

(2) 正五角形では、辺 AB と辺 CD の方向は、辺 BC の方向に対して対称である。したがって $\vec{a} + \vec{c}$ は $\overrightarrow{BC}$ と同じ向きである。

さらに、 $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は 144° であるから、 $|\vec{a} + \vec{c}| = 2x \cos 72^\circ$ である。正五角形の黄金比の関係から $2 \cos 72^\circ = \frac{1}{\varphi}$ なので $|\vec{a} + \vec{c}| = \frac{x}{\varphi}$ である。一方、 $|\overrightarrow{BC}| = x$ で向きは同じだから、

$$\overrightarrow{BC} = \varphi(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

である。

(3) 対角線の交点でできる内側の正五角形 R_2 は、もとの正五角形 R_1 と相似である。五芒星の各辺では、対角線が黄金比で分割されるため、 R_2 の一辺と R_1 の一辺の比は $\frac{1}{\varphi^2}$ である。したがって R_2 の一辺の長さは $\frac{x}{\varphi^2}$ である。 $\varphi^2 = \varphi + 1$ より $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ なので、求める長さは $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$ である。

(4) (3) より, R_{n+1} と R_n の一辺の比は常に $\rho = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である。したがって面積比は $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \rho^2$ であり, $S_k = S_1 \rho^{2(k-1)}$ である。よって

$$\frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k = 1 - \rho^2 + \rho^4 - \rho^6 + \cdots + (-1)^{n+1} \rho^{2(n-1)}$$

である。 $0 < \rho < 1$ なので, この交代等比級数の極限は $\frac{1}{1+\rho^2}$ である。ここで $\rho^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ だから

$$\frac{1}{1+\rho^2} = \frac{1}{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3(3-\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

である。

したがって求める極限は $\frac{3+\sqrt{5}}{6}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

正五角形の辺ベクトルを複素数で表し, 隣の辺へ進むたびに 72° 度回転することを使う。辺長と対角線長の比は三角比から黄金比になり, ベクトル関係は 5 乗根の回転因子から直接得る。内側五角形の相似比を求め, 面積の交代等比級数へつなげる。

【解答】

$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ とおく。

(1) 外接円の半径を R とすると, 辺と対角線に対する中心角はそれぞれ $72^\circ, 144^\circ$ だから

$$x = 2R \sin 36^\circ, \quad y = 2R \sin 72^\circ.$$

よって

$$\frac{y}{x} = 2 \cos 36^\circ.$$

ここで $c = 2 \cos 36^\circ$ とおく。 $3 \cdot 36^\circ = 108^\circ = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ$ なので, $\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ$ である。三倍角・二倍角の公式から

$$c^3 + c^2 - 3c - 2 = 0 = (c+2)(c^2 - c - 1).$$

$c > 0$ より $c = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$ である。よって

$$\frac{y}{x} = \varphi.$$

したがって $y = \varphi x$ であり, $\varphi^2 = \varphi + 1$ から

$$y(y-x) = \varphi(\varphi-1)x^2 = x^2.$$

(2) 平面ベクトルを複素数とみなし, $\zeta = e^{2\pi i/5}$ とする。正五角形では辺の向きが順に 72° ずつ回転するので, $\overrightarrow{BC} = \zeta \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} = \zeta^2 \overrightarrow{a}$ である。また

$$1 + \zeta^2 = 2 \cos 72^\circ \zeta = \frac{1}{\varphi} \zeta$$

だから

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = (1 + \zeta^2) \overrightarrow{a} = \frac{1}{\varphi} \overrightarrow{BC}.$$

したがって

$$\overrightarrow{BC} = \varphi(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}).$$

(3) 五芒星の 1 本の対角線上で, 内側正五角形の一辺は長さ x の 2 区間の重なりに当たり, その長さは

$$2x - y = (2 - \varphi)x = \frac{x}{\varphi^2}.$$

よって

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$$

である。

(4) 各段階で一辺は $\rho = 1/\varphi^2 = (3 - \sqrt{5})/2$ 倍になるので、面積は ρ^2 倍になる。したがって

$$\frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k = 1 - \rho^2 + \rho^4 - \cdots + (-1)^{n+1} \rho^{2(n-1)}.$$

$0 < \rho < 1$ より極限は

$$\frac{1}{1 + \rho^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 6。目安時間は 25 分。正五角形の標準的な黄金比を, Ptolemy の定理から一度導いておくと後の議論が安定する。(2) は係数が φ なのか $1/\varphi$ なのかを取り違えやすいので, $\vec{a} + \vec{c}$ の向きと大きさを分けて確認する。(3) 以降は長さの相似比と面積比を混同しないことが重要で, 面積は ρ^2 倍になる。最後の極限は交代等比級数として処理する。