

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

双曲線

$$H: x^2 - y^2 = 1$$

上の 3 点

$$A(-1, 0), \quad B(1, 0), \quad C(s, t) \quad (t \neq 0)$$

を考える。

- (1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とする。 P の座標を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とする。 Q の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とする。3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

第 2 問

複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし、実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1、裏が出れば 0 とし、5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく。複素数 w を

$$w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$$

と定める。

- (1) 5 回とも表が出たとする。 w の値を求めよ。
- (2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = a_4 = 1$ のとき、 $|w| < 1$ であることを示せ。
- (3) $|w| < 1$ である確率を求めよ。

第 3 問

a, b を自然数とし、不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (\text{A})$$

を考える。ただし、

$$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$$

であること、および $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ。

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち、 $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ。

第 4 問

b, c を実数とする。2 次関数

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする。

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき、放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

第 5 問

xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。回転体 L に含まれる点のうち、 xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とする。

(1) $0 \leq t \leq 2$ とする。 xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り、 y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。

$$t = (2 \cos \theta)^2 \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

のとき、 $S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)