

大阪大学 2017 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

双曲線

$$H: x^2 - y^2 = 1$$

上の 3 点

$$A(-1, 0), \quad B(1, 0), \quad C(s, t) \quad (t \neq 0)$$

を考える。

- (1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とする。 P の座標を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とする。 Q の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とする。3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の点 (u, v) における接線を $ux - vy = 1$ として使い、 A, B, C それぞれの接線を求める。 $C(s, t)$ は双曲線上で $t \neq 0$ なので $s \neq 0, \pm 1$ であり、交点計算の分母は 0 にならない。最後は P, R を結ぶ直線の式に Q の x 座標を代入し、 $y = 0$ になることを直接確認して一直線性を示す。

【解答】

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の点 (u, v) における接線は $ux - vy = 1$ である。実際、 (u, v) は $u^2 - v^2 = 1$ を満たし、この直線はその点を通る接線になっている。なお $C(s, t)$ については $s^2 - t^2 = 1$ かつ $t \neq 0$ であるから、 $s \neq 0, \pm 1$ である。

(1) 点 $A(-1, 0)$ における接線は $-x = 1$ すなわち $x = -1$ である。直線 BC は $B(1, 0)$ と $C(s, t)$ を通るので $y = \frac{t}{s-1}(x-1)$ である。ここに $x = -1$ を代入して $y = \frac{t}{s-1}(-2) = \frac{2t}{1-s}$ を得る。したがって $P = \left(-1, \frac{2t}{1-s}\right)$ である。

(2) 点 $C(s, t)$ における接線は $sx - ty = 1$ である。直線 AB は $y = 0$ だから、交点 Q は $sx = 1$ を満たす。よって $Q = \left(\frac{1}{s}, 0\right)$ である。

(3) 点 $B(1, 0)$ における接線は $x = 1$ である。直線 AC は $A(-1, 0)$ と $C(s, t)$ を通るので $y = \frac{t}{s+1}(x+1)$ である。したがって $x = 1$ を代入して $R = \left(1, \frac{2t}{s+1}\right)$ を得る。

直線 PR の傾きは

$$\frac{\frac{2t}{s+1} - \frac{2t}{1-s}}{1 - (-1)} = \frac{t}{1} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{1-s} \right) = -\frac{2st}{(s+1)(1-s)}$$

である。したがって直線 PR は $y - \frac{2t}{1-s} = -\frac{2st}{(s+1)(1-s)}(x+1)$ と書ける。この式に $x = \frac{1}{s}$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{2t}{1-s} - \frac{2st}{(s+1)(1-s)} \left(\frac{1}{s} + 1 \right) \\ &= \frac{2t}{1-s} - \frac{2st}{(s+1)(1-s)} \cdot \frac{s+1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。これは $Q\left(\frac{1}{s}, 0\right)$ が直線 PR 上にあることを示している。よって 3 点 P, Q, R は一直線上にある。

▶ 解法 2

【方針】

各接線の式から P, Q, R の座標を求めるところまでは同じである。一直線性は傾きの式を作らず、 $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{QR}$ の各成分の比が同じになることを示す。縦線の場合分けが不要になる。

【解答】

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点 (u, v) における接線は

$$ux - vy = 1$$

である。また $s^2 - t^2 = 1, t \neq 0$ より

$$s \neq 0, \quad s \neq \pm 1.$$

(1) $A(-1, 0)$ における接線は $x = -1$ である。直線 BC は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$

だから

$$P = \left(-1, \frac{2t}{1-s}\right).$$

(2) $C(s, t)$ における接線は

$$sx - ty = 1.$$

直線 AB は $y = 0$ なので

$$Q = \left(\frac{1}{s}, 0\right).$$

(3) $B(1, 0)$ における接線は $x = 1$ である。直線 AC は

$$y = \frac{t}{s+1}(x+1)$$

だから

$$R = \left(1, \frac{2t}{s+1}\right).$$

ここで

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{s+1}{s}, -\frac{2t}{1-s}\right)$$

であり

$$\overrightarrow{QR} = \left(\frac{s-1}{s}, \frac{2t}{s+1}\right).$$

それぞれの成分を比べると

$$\frac{(\overrightarrow{QR})_x}{(\overrightarrow{PQ})_x} = \frac{s-1}{s+1}$$

であり、また

$$\frac{(\overrightarrow{QR})_y}{(\overrightarrow{PQ})_y} = \frac{\frac{2t}{s+1}}{-\frac{2t}{1-s}} = \frac{s-1}{s+1}.$$

したがって

$$\overrightarrow{QR} = \frac{s-1}{s+1} \overrightarrow{PQ}.$$

よって P, Q, R は一直線上にある。

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 18 分。接線公式 $ux - vy = 1$ を正確に使えるかで処理量が大きく変わる問題である。 $t \neq 0$ から $s \neq 0, \pm 1$ を確認しておく、分母の扱いに不安が残らない。最後の一直線性は図形的に見通しが立っても、答案では直線 PR へ Q を代入する形にすると計算が最短で、符号ミスも発見しやすい。

【第 2 問】

複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし、実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1、裏が出れば 0 とし、5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく。複素数 w を

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

と定める。

- (1) 5 回とも表が出たとする。 w の値を求めよ。
- (2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$ のとき、 $|w| < 1$ であることを示せ。
- (3) $|w| < 1$ である確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

条件を満たす z は偏角 $2\pi/5$ の 5 乗根であり、 $1, z, z^2, z^3, z^4$ は正五角形の頂点を表す。(1) は 5 乗根の和、(2) は共役な 2 点の和で処理する。(3) は硬貨の結果を 5 頂点から選ぶ部分集合と見なし、選んだ個数ごとに $|w| < 1$ を数える。特に 1 個・4 個では $|w| = 1$ となり、厳密不等号から除外する。

【解答】

実部と虚部がともに正である 5 乗根は $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ である。よって $z \neq 1$ であり、 $1, z, z^2, z^3, z^4$ は正五角形の 5 つの頂点を表す。

(1) $z^5 = 1, z \neq 1$ より $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0$ である。5 回とも表なら $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ なので $w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ である。

(2) このとき $w = z + z^4$ である。 z^4 は z の共役なので $z + z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ である。 $\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ であり、 $0 < \cos \frac{2\pi}{5} < \frac{1}{2}$ だから $|w| = 2 \cos \frac{2\pi}{5} < 1$ である。

(3) 各 a_k は 0 または 1 であり、これは 5 つの頂点 $1, z, z^2, z^3, z^4$ からいくつかを選ぶことに対応する。全事象は $2^5 = 32$ 通りで、すべて等確率である。

選ぶ個数ごとに調べる。0 個を選ぶと $w = 0$ 、5 個を選ぶと (1) より $w = 0$ であるから、どちらも条件を満たす。

1 個だけ選ぶと $|w| = 1$ であり、条件 $|w| < 1$ を満たさない。4 個選ぶ場合は、選ばれなかった 1 個の頂点を α とすると、5 頂点の和が 0 であることから $w = -\alpha$ であり、やはり $|w| = 1$ で条件を満たさない。

2 個選ぶ場合を考える。2 つの頂点が隣り合うとき、中心角は $\frac{2\pi}{5}$ なので和の大きさは $2 \cos \frac{\pi}{5} > 1$ である。2 つの頂点が隣り合わないとき、中心角は $\frac{4\pi}{5}$ なので和の大きさは $2 \cos \frac{2\pi}{5} < 1$ である。正五角形で隣り合わない 2 点の選び方は 5 通りである。

3 個選ぶ場合は、選ばれなかった 2 個の頂点の和を u とすると、5 頂点全体の和が 0 であるから $w = -u$ である。したがって $|w| < 1$ となるのは、選ばれなかった 2 点の和が $|u| < 1$ である場合であり、これも 5 通りである。

以上より、条件を満たす場合の数は $1 + 1 + 5 + 5 = 12$ である。したがって求める確率は $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

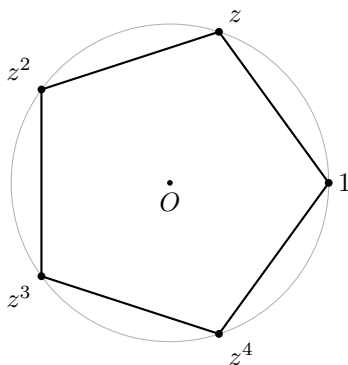
$1, z, z^2, z^3, z^4$ を単位円上の正五角形として図示する。2 頂点の和の絶対値を、中心角が $2\pi/5$ か $4\pi/5$ かで分類する。3 頂点の和は、選ばなかった 2 頂点の和の符号を変えたものとして数える。

【解答】

条件を満たす z は

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

である。したがって $1, z, z^2, z^3, z^4$ は単位円上の正五角形の頂点である。



(1) $z \neq 1$ なので

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0.$$

5 回とも表なら

$$w = 0.$$

(2) このとき

$$w = z + z^4 = z + \bar{z} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}.$$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

より

$$0 < 2 \cos \frac{2\pi}{5} < 1.$$

したがって $|w| < 1$ である。

(3) 係数が 1 である項の個数を m とする。 $m = 0, 5$ では $w = 0$ なので条件を満たす。 $m = 1$ では $|w| = 1$ 。 $m = 4$ でも、選ばなかった頂点を α とすれば

$$w = -\alpha$$

だから $|w| = 1$ である。

$m = 2$ のとき、選んだ 2 頂点の中心角が $2\pi/5$ なら

$$|w| = 2 \cos \frac{\pi}{5} > 1,$$

中心角が $4\pi/5$ なら

$$|w| = 2 \cos \frac{2\pi}{5} < 1.$$

したがって条件を満たすのは、正五角形で隣り合わない 2 頂点を選ぶ 5 通りである。

$m = 3$ のときは、選ばなかった 2 頂点の和を u とすると

$$w = -u.$$

よって条件を満たすものは、補集合の 2 頂点の和が隣り合わない 5 通りである。

以上より有利な場合は

$$1 + 1 + 5 + 5 = 12$$

通り。全 32 通りは等確率なので

$$\Pr(|w| < 1) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 20 分。5 乗根を正五角形の頂点として見ると、複素数の計算をベクトル和の長さの分類に置き換えられる。厳密不等号なので $|w| = 1$ の 1 個選択・4 個選択を数えないことが重要である。2 点の場合は辺と対角線の違い、3 点の場合は補集合の 2 点で数えると、重複や数え落としを避けやすい。

【第 3 問】

a, b を自然数とし、不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (\text{A})$$

を考える。ただし、

$$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$$

であること、および $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ。

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち、 $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(A) を直接満たす分数を探すのではなく、 $a^2 - 7b^2$ という整数に変換して候補を絞る。(1) で $\frac{a}{b} + \sqrt{7}$ を 6 未満に押さえ、(2) では $|a^2 - 7b^2| < 12/b^2$ を得る。 $\sqrt{7}$ が無理数であるため左辺は 0 でない整数となり、 $b = 2, 3$ だけを調べればよい。最後に候補 (8, 3) が元の (A) を満たすことを必ず確認する。

【解答】

(1) (A) と $b \geq 2$ より $\frac{a}{b} < \sqrt{7} + \frac{2}{b^4} \leq \sqrt{7} + \frac{1}{8}$ である。したがって $\frac{a}{b} + \sqrt{7} < 2\sqrt{7} + \frac{1}{8}$ である。与えられた $\sqrt{7} < 2.646$ を用いると $2\sqrt{7} + \frac{1}{8} < 2 \cdot 2.646 + \frac{1}{8} = 5.417 < 6$ である。また a, b は自然数なので $\frac{a}{b} + \sqrt{7} > 0$ である。よって $\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$ が成り立つ。

(2) $\sqrt{7}$ は無理数なので、整数 $a^2 - 7b^2$ は 0 ではない。したがって $|a^2 - 7b^2|$ は正の整数である。

(1) を用いると

$$\begin{aligned} |a^2 - 7b^2| &= b^2 \left| \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 7 \right| \\ &= b^2 \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| \\ &< b^2 \cdot \frac{2}{b^4} \cdot 6 = \frac{12}{b^2} \end{aligned}$$

である。よって $1 \leq |a^2 - 7b^2| < \frac{12}{b^2}$ であるから、 $b^2 < 12$ でなければならない。 $b \geq 2$ より、調べるべきものは $b = 2, 3$ だけである。 $b = 2$ のとき $|a^2 - 28| < 3$ である。つまり $25 < a^2 < 31$ であるが、この範囲に平方数はない。 $b = 3$ のとき $|a^2 - 63| < \frac{4}{3}$ である。したがって $\frac{185}{3} < a^2 < \frac{193}{3}$ であり、この範囲にある平方数は 64 だけである。よって $a = 8$ を得る。

最後に $(a, b) = (8, 3)$ が (A) を満たすことを確認する。

$$\left| \frac{8}{3} - \sqrt{7} \right| = \frac{\left| \frac{64}{9} - 7 \right|}{\frac{8}{3} + \sqrt{7}} = \frac{1}{9\left(\frac{8}{3} + \sqrt{7}\right)}$$

である。 $\sqrt{7} > 2.645 > \frac{11}{5}$ より $\frac{8}{3} + \sqrt{7} > \frac{8}{3} + \frac{11}{5} = \frac{73}{15} > \frac{9}{2}$ だから

$$\left| \frac{8}{3} - \sqrt{7} \right| < \frac{1}{9 \cdot \frac{9}{2}} = \frac{2}{81} = \frac{2}{3^4}$$

である。したがって求める組は $(a, b) = (8, 3)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) の評価と $\sqrt{7}$ の無理性から、 $|a^2 - 7b^2|$ を 0 でない整数として $b = 2, 3$ まで絞る。その後は平方数を調べる代わりに、もとの近似不等式を a の短い開区間へ直して整数 a を直接読む。

【解答】

(1) (A) と $b \geq 2$ より

$$\frac{a}{b} < \sqrt{7} + \frac{2}{b^4} \leq \sqrt{7} + \frac{1}{8}.$$

したがって

$$0 < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < 2\sqrt{7} + \frac{1}{8} < 2 \cdot 2.646 + \frac{1}{8} < 6.$$

よって

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6.$$

(2) $\sqrt{7}$ は無理数なので

$$a^2 - 7b^2 \neq 0.$$

よって $|a^2 - 7b^2|$ は正の整数である。(1) と (A) を掛け合わせると

$$\begin{aligned} 1 &\leq |a^2 - 7b^2| \\ &= b^2 \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| \\ &< b^2 \cdot \frac{2}{b^4} \cdot 6 = \frac{12}{b^2}. \end{aligned}$$

したがって $b^2 < 12$ 。 $b \geq 2$ だから

$$b = 2 \quad \text{または} \quad b = 3.$$

$b = 2$ のとき

$$\left| \frac{a}{2} - \sqrt{7} \right| < \frac{1}{8}.$$

$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ を用いると

$$2.520 < \frac{a}{2} < 2.771,$$

すなわち

$$5.040 < a < 5.542.$$

この範囲に自然数 a はない。

$b = 3$ のとき

$$|a - 3\sqrt{7}| < \frac{2}{27}.$$

また

$$7.935 < 3\sqrt{7} < 7.938$$

だから

$$7.86 < a < 8.013.$$

よって唯一の候補は $a = 8$ である。

最後に

$$\left| \frac{8}{3} - \sqrt{7} \right| = \frac{1}{9 \left(\frac{8}{3} + \sqrt{7} \right)}.$$

$\sqrt{7} > 11/5$ より

$$\frac{8}{3} + \sqrt{7} > \frac{8}{3} + \frac{11}{5} = \frac{73}{15} > \frac{9}{2}.$$

したがって

$$\left| \frac{8}{3} - \sqrt{7} \right| < \frac{1}{9 \cdot \frac{9}{2}} = \frac{2}{81} = \frac{2}{3^4}.$$

よって求める組は

$$(a, b) = (8, 3)$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 目安時間は 22 分。有理近似を $|a^2 - 7b^2|$ という整数条件へ変換するのが核心である。(1) の上界は (2) でそのまま使うため, $b \geq 2$ から $2/b^4 \leq 1/8$ を丁寧に書いておきたい。 $\sqrt{7}$ が無理数なので左辺が 0 でない整数になる点, 候補を出した後に元の (A) へ代入して確認する点が主要な採点箇所である。

【第 4 問】

b, c を実数とする。2 次関数

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする。

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき、放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$u = f(1)$, $v = f(3)$ とおいて, 条件を長方形 $0 \leq u \leq 2$, $5 \leq v \leq 6$ に変換する。 b, c を u, v で解き, (1) は $f(4)$ を一次式として端点で評価する。(2) は頂点の高さ $q = b^2/4 + c$ を u, v で表し, v について単調であることを使って最小・最大を調べる。(3) は文系第 1 問と同じ面積公式 $\frac{4}{3}q\sqrt{q}$ を $q = 6$ に適用する。

【解答】

$u = f(1)$, $v = f(3)$ とおく。条件は $0 \leq u \leq 2$, $5 \leq v \leq 6$ である。また $f(1) = -1 + b + c = u$, $f(3) = -9 + 3b + c = v$ であるから, これを解いて $b = \frac{v-u}{2} + 4$, $c = \frac{3u-v}{2} - 3$ を得る。

(1)

$$\begin{aligned} f(4) &= -16 + 4b + c \\ &= -16 + 4\left(\frac{v-u}{2} + 4\right) + \left(\frac{3u-v}{2} - 3\right) \\ &= -\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v - 3 \end{aligned}$$

である。この式は u が小さいほど大きく, v が大きいほど大きい。したがって最小値は $u = 2, v = 5$ のとき $-1 + \frac{15}{2} - 3 = \frac{7}{2}$ であり, 最大値は $u = 0, v = 6$ のとき $9 - 3 = 6$ である。よって $\frac{7}{2} \leq f(4) \leq 6$ である。

(2) 放物線 $y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標は $q = c + \frac{b^2}{4}$ である。上で求めた b, c を代入すると $q = \frac{(v-u+4)^2}{16} + u$ である。

ここで $0 \leq u \leq 2$, $5 \leq v \leq 6$ では $v - u + 4 > 0$ であるから, u を固定すると q は v について増加する。よって最小値は $v = 5$ で, 最大値は $v = 6$ で調べればよい。 $v = 5$ のとき $q = \frac{(9-u)^2}{16} + u = 5 + \frac{(u-1)^2}{16}$ であるから, $0 \leq u \leq 2$ における最小値は $u = 1$ で 5 である。 $v = 6$ のとき $q = \frac{(10-u)^2}{16} + u = 6 + \frac{(u-2)^2}{16}$ であるから, $0 \leq u \leq 2$ における最大値は $u = 0$ で $\frac{25}{4}$ である。したがって $5 \leq q \leq \frac{25}{4}$ である。

(3) 頂点の x 座標を h とすると、頂点の y 座標が 6 である放物線は $y = 6 - (x - h)^2$ と書ける。 x 軸との交点は $x = h \pm \sqrt{6}$ であり、囲まれた部分の面積は

$$\int_{h-\sqrt{6}}^{h+\sqrt{6}} \{6 - (x - h)^2\} dx$$

である。 $X = x - h$ とおくと

$$S = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (6 - X^2) dX = 2 \left(6\sqrt{6} - \frac{(\sqrt{6})^3}{3} \right) = 8\sqrt{6}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

放物線を頂点形式 $f(x) = q - (x - h)^2$ とおく。 $u = f(1), v = f(3)$ の差から頂点の横座標 h を求め、 $q = u + (h - 1)^2$ とし値域を調べる。(3) は高さ y の水平切片を積分する。

【解答】

放物線を

$$f(x) = q - (x - h)^2$$

と書き、

$$u = f(1), \quad v = f(3)$$

とおく。条件は

$$0 \leq u \leq 2, \quad 5 \leq v \leq 6$$

である。

(1)

$$v - u = \{q - (3 - h)^2\} - \{q - (1 - h)^2\} = 4(h - 2)$$

だから

$$2h = 4 + \frac{v - u}{2}.$$

また

$$f(4) - f(3) = -7 + 2h$$

なので

$$f(4) = v - 7 + 2h = -\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v - 3.$$

これは u について減少し、 v について増加する。よって

$$\frac{7}{2} \leq f(4) \leq 6.$$

(2) 上の差の式から

$$h = 2 + \frac{v - u}{4}.$$

したがって

$$q = u + (h - 1)^2 = u + \frac{(v - u + 4)^2}{16}.$$

u を固定すると $v - u + 4 > 0$ なので、 q は v とともに増加する。

最小値は $v = 5$ として

$$q = 5 + \frac{(u - 1)^2}{16}$$

より $u = 1$ のとき 5。最大値は $v = 6$ として

$$q = 6 + \frac{(u - 2)^2}{16}$$

より $u = 0$ のとき $25/4$ である。したがって

$$5 \leq q \leq \frac{25}{4}.$$

(3) 頂点の高さが 6 なら

$$f(x) = 6 - (x - h)^2.$$

高さ y における図形の横幅は

$$2\sqrt{6 - y}.$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 2\sqrt{6 - y} dy \\ &= \left[\frac{4}{3}(6 - y)^{3/2} \right]_{y=6}^{y=0} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 6\sqrt{6} = 8\sqrt{6}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6, 計算量 6. 目安時間は 24 分. b, c を直接動かすより, 指定されている $f(1), f(3)$ を u, v と置く方が制約の形が見やすい. (2) では頂点の値が二次式になるため, 端点だけを機械的に見ると最小 $q = 5$ を落としやすい. v 方向の単調性を先に押さえ, 残った 1 変数の平方完成で最小・最大を分けて確認するのが安全である. (3) は第 1 問の公式に接続する典型的な設計である.

【第 5 問】

xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。回転体 L に含まれる点のうち、 xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とする。

(1) $0 \leq t \leq 2$ とする。 xy 平面上的点 $(0, t)$ を通り、 y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。

$$t = (2 \cos \theta)^2 \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

のとき、 $S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

高さ t で水平に切ると、回転体 L の断面は中心 $(0, 0)$, 半径 $\sqrt{t}$ の円板になる。直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下という条件は、同じ断面内で中心 $(1, 0)$, 半径 1 の円板に入ることなので、 $S(t)$ は 2 円の共通部分の面積である。 $\sqrt{t} = 2 \cos \theta$ とおき、2 つの扇形から 2 つの二等辺三角形を引いて断面積を作る。(2) は $dt = -8 \sin \theta \cos \theta d\theta$ で積分し、三角関数を $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ に整理する。

【解答】

(1) 空間の座標を、もとの xy 平面に垂直な方向を加えて考える。高さ t の平面で L を切ると、もとの放物線 $y = x^2$ から半径は $\sqrt{t}$ となるので、断面は中心 $(0, 0)$, 半径 $\sqrt{t}$ の円板である。

一方、直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下である点は、この断面内では中心 $(1, 0)$, 半径 1 の円板の中にある点である。したがって $S(t)$ は、中心間距離 1, 半径 $\sqrt{t}$ と 1 の 2 円の共通部分の面積である。

$$\sqrt{t} = 2 \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

とおく。半径 $2 \cos \theta$ の円を中心 O , 半径 1 の円を中心 A とする。2 円の交点を結ぶ弦について、中心 O から見た半角を α とすると $\cos \alpha = \frac{\sqrt{t}}{2} = \cos \theta$ であるから $\alpha = \theta$ である。よって中心 O 側の扇形の中心角は 2θ で、その面積は $\frac{1}{2}(2 \cos \theta)^2 \cdot 2\theta = 4\theta \cos^2 \theta$ である。

同じ弦を中心 A から見ると、対応する中心角は $2\pi - 4\theta$ である。したがって中心 A 側の扇形の面積は $\frac{1}{2}(2\pi - 4\theta) = \pi - 2\theta$ である。

この 2 つの扇形を足すと、共通部分に対応する 2 つの二等辺三角形を余分に含む。中心 O 側の三角形の面積は $\frac{1}{2}(2 \cos \theta)^2 \sin 2\theta = 2 \cos^2 \theta \sin 2\theta$ であり、中心 A 側の三角形の面積は $\frac{1}{2} \sin(2\pi - 4\theta) = -\frac{1}{2} \sin 4\theta$ である。両者の和は $2 \cos^2 \theta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta = \sin 2\theta$ である。よって $S(t) = 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta$ である。

(2) $t = 4 \cos^2 \theta$ であるから $dt = -8 \sin \theta \cos \theta d\theta$ である。 $t = 0$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = 2$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ に対応するので

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta\} 8 \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

である。

ここで

$$4\theta \cos^2 \theta - 2\theta = 2\theta \cos 2\theta, \quad 8 \sin \theta \cos \theta = 4 \sin 2\theta$$

より、被積分関数は $4(\pi + 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta) \sin 2\theta$ である。さらに整理すると $4\pi \sin 2\theta + 4\theta \sin 4\theta - 2 + 2 \cos 4\theta$ となる。したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{4\pi \sin 2\theta + 4\theta \sin 4\theta - 2 + 2 \cos 4\theta\} d\theta \\ &= \left[-2\pi \cos 2\theta - \theta \cos 4\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta - 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

である。端点を代入すると $V = 2\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は高さ t の断面を、原点中心・半径 $\sqrt{t}$ の円板と $(1,0)$ 中心・半径 1 の円板の共通部分として図示し、2つの扇形から三角形を引く。(2) は積分順序を変え、 xz 平面上の各点の上にある高さ $2 - r^2$ を極座標で積分する。

【解答】

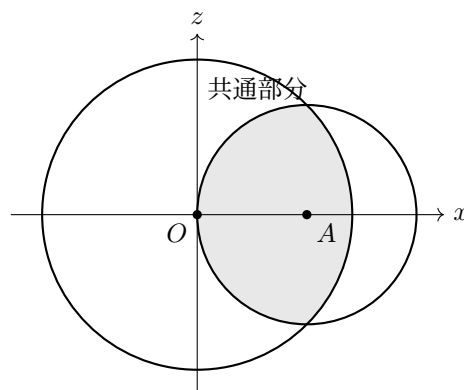
(1) 高さ t の断面で、 y 軸からの距離を r とする。回転体 L の条件は

$$r \leq \sqrt{t},$$

直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下という条件は

$$(x-1)^2 + z^2 \leq 1$$

である。したがって断面は、中心 $O = (0,0)$ 、半径 $\sqrt{t}$ の円板と、中心 $A = (1,0)$ 、半径 1 の円板の共通部分である。



$$\sqrt{t} = 2 \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

とする。2円の交点の一つを X とすると、三角形 OAX の辺長は

$$OX = 2 \cos \theta, \quad OA = AX = 1.$$

余弦定理から

$$\angle AOX = \theta, \quad \angle OAX = \pi - 2\theta.$$

よって共通部分は、中心角 2θ の O 側の扇形と、中心角 $2\pi - 4\theta$ の A 側の扇形から、2 個の合同な三角形を引いたものである。したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= 4\theta \cos^2 \theta + (\pi - 2\theta) - \sin 2\theta \\ &= 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta. \end{aligned}$$

(2) 今度は積分の順序を変える。 xz 平面で極座標

$$x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

を用いる。円柱 $(x-1)^2 + z^2 \leq 1$ は

$$0 \leq r \leq 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

と表される。また L の上端 $y = 2$ から

$$r \leq \sqrt{2}.$$

固定した (r, φ) に対し、 y は r^2 から 2 まで動くので、その高さは $2 - r^2$ である。

対称性を使い、 $\varphi = \pi/4$ で上限を分けると

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r \, dr \, d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} (2 - r^2) r \, dr \, d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

内側の積分は

$$\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r \, dr = 1$$

であり、また

$$\int_0^{2 \cos \varphi} (2 - r^2) r \, dr = 4 \cos^2 \varphi - 4 \cos^4 \varphi = \sin^2 2\varphi.$$

よって

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi \, d\varphi \right\} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8, 計算量 8。目安時間は 30 分以上。核心は立体を直接想像することではなく、高さ t の断面を 2 円の共通部分として正確に翻訳することである。 $\sqrt{t} = 2 \cos \theta$ の置換では、 $t = 0, 2$ に対応する θ の向きが逆になるため、積分範囲の反転と dt の符号を丁寧に処理したい。断面積では扇形から三角形を引く構成、体積積分では $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ への整理が主な採点点である。