

入 学 試 験 問 題



数 学

大 阪 大 学 2018 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ の範囲で

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $x > 0$ のとき,

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

の取りうる値の範囲を求めよ。

第 2 問

a, b を正の実数とし,

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$$

とする.

(1) 実数 c に対して $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする. このとき $c > 0$ であり, さらに

$$(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$$

で割り切れることを示せ.

(2) $f(x)$ が 4 個の実数根をもつとき, $a \geq 4$ を示せ.

(3) $a = 5$ とする. $f(x)$ が 4 個の実数根をもつような自然数 b をすべて求めよ.

第 3 問

2つの関数

$$f(t) = 2 \sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$$

によって表される曲線

$$C: \quad x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

(1) $f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ.

(2) $0 \leq t_1 < t_2 \leq \pi/2$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ とする. このとき

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$$

を示せ.

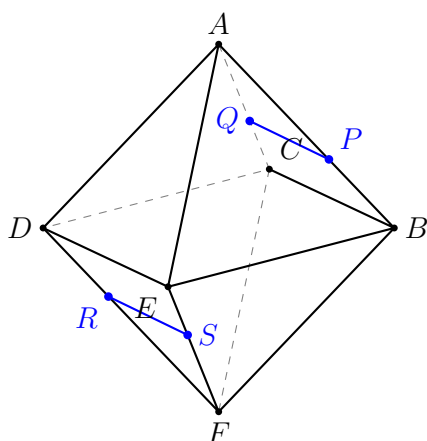
(3) 曲線 C と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

第 4 問

座標空間に 6 点

$$\begin{aligned} A(0, 0, 1), \quad B(1, 0, 0), \quad C(0, 1, 0), \\ D(-1, 0, 0), \quad E(0, -1, 0), \quad F(0, 0, -1) \end{aligned}$$

を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある。 $0 < s < 1$ 、 $0 < t < 1$ とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q 、線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



- (1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。
- (2) 線分 PQ の中点を L 、線分 RS の中点を M とする。 s, t が与えられた範囲を動くとき、線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。
- (3) 4 点 P, Q, R, S を通る平面による正八面体の切り口の面積を X とする。 $LM = m$ のとき、 X を最大にする s, t と、そのときの X を求めよ。

第 5 問

$0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ とし、2つのチーム A、B が引き分けなしで n 回の試合を行う。第 1 試合で A が勝つ確率は p である。A が勝った直後の試合で A が勝つ確率は p 、B が勝った直後の試合で A が勝つ確率は q である。

(1) 第 n 試合で A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n \geq 3$ とする。B が連勝せず、かつちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)