

大阪大学 2018 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ の範囲で

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $x > 0$ のとき、

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

の取りうる値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は左右それぞれとの差を関数として置き、導関数の符号で示す。(2) はまず $\log(1+x) < x$ から下限 0 を、 $\log(1+x) > 2x/(x+2)$ から上限 $1/2$ を得る。最後に $x \rightarrow 0+$ と $x \rightarrow \infty$ の極限を確認し、連続性により开区間全体が値域になることを述べる。

【解答】

(1) $F(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ とおく。 $x > 0$ で $F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$ であり、 $F(0) = 0$ だから $F(x) > 0$ である。よって $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ が成り立つ。

次に $G(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x)$ とおく。 $x > 0$ で $G'(x) = \frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{(1+x)^{3/2}}$ である。ここで $1 + x/2 > 0$ であり、 $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (1+x) = \frac{x^2}{4} > 0$ だから $1 + x/2 > \sqrt{1+x}$ である。したがって $G'(x) > 0$ 、また $G(0) = 0$ より $G(x) > 0$ である。ゆえに $\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つ。

(2) $x > 0$ では $\log(1+x) < x$ だから、分母が正であることに注意して $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} > 0$ である。

上からの評価を作るため、 $H(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ とおく。すると $H'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} > 0$ であり、 $H(0) = 0$ だから $\log(1+x) > \frac{2x}{x+2}$ である。よって $\frac{1}{\log(1+x)} < \frac{x+2}{2x}$ となり、 $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{x+2}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ を得る。したがって常に $0 < y < \frac{1}{2}$ である。

端の値を確認する。 $x \rightarrow 0+$ では、(1) の左側の不等式と $\log(1+x) < x$ から $1 - \frac{x}{2} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1$ なので $\log(1+x)/x \rightarrow 1$ である。また

$$x - \log(1+x) = \int_0^x \frac{u}{1+u} du$$

であり、 $0 \leq u \leq x$ で $1/(1+x) \leq 1/(1+u) \leq 1$ だから $\frac{x^2}{2(1+x)} \leq x - \log(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ である。したがって $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \log(1+x)}{x \log(1+x)} \rightarrow \frac{1}{2}$ である。

一方、 $x \rightarrow \infty$ では $\log(1+x) \rightarrow \infty$ かつ $x \rightarrow \infty$ なので $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \rightarrow 0$ である。関数 y は $x > 0$ で連続であり、上の 2 つの極限により 0 と $1/2$ にいくらでも近い値をとる。したがって値域は $0 < y < \frac{1}{2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) の左側は $\log(1+x)$ の積分表示と $1/(1+t) > 1-t$ を使う。右側は $u = \sqrt{1+x}$ とおき、 $u - u^{-1} - 2\log u$ の単調性で示す。(2) は与えられた右側の不等式が、関数 y の導関数が負であることと同値になる点を使い、端点極限と合わせて値域を決める。

【解答】

(1)

$0 \leq t \leq x$ では

$$\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$$

であり、 $t > 0$ では狭義不等号が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\ &> \int_0^x (1-t) dt \\ &= x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

次に

$$u = \sqrt{1+x} > 1$$

とおく。示すべき右側の不等式は

$$2\log u < u - \frac{1}{u}$$

である。そこで

$$\phi(u) = u - \frac{1}{u} - 2\log u$$

とおけば

$$\phi'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \frac{(u-1)^2}{u^2} > 0$$

であり、 $\phi(1) = 0$ 。よって $u > 1$ で $\phi(u) > 0$ となり、

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

を得る。

(2)

$$Y(x) = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

とおく。微分すると

$$Y'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}.$$

(1) の右側から

$$(1+x)\{\log(1+x)\}^2 < x^2$$

であるため

$$Y'(x) < 0.$$

したがって Y は $x > 0$ で狭義単調減少する。

また

$$x - \log(1+x) = \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

より

$$\frac{x^2}{2(1+x)} \leq x - \log(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

さらに $\log(1+x)/x \rightarrow 1$ だから

$$\lim_{x \rightarrow +0} Y(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \log(1+x)}{x \log(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

一方,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x) = 0.$$

連続かつ狭義単調減少で, どちらの端点値も取らないので, 値域は

$$0 < y < \frac{1}{2}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。(1) は差を微分する方法のほか, 積分比較と $u = \sqrt{1+x}$ の置換でも証明できる。(2) では (1) の上側の不等式が

$$Y'(x) < 0$$

を直接与える。値域は単なる評価 $0 < Y < 1/2$ だけでなく, $x \rightarrow +0$ で $1/2$, $x \rightarrow \infty$ で 0 へ近づくことと, 連続・単調性を明記して開区間全体と結論する。積分はすべて独立表示に整えた。

【第 2 問】

a, b を正の実数とし,

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$$

とする。

(1) 実数 c に対して $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする。このとき $c > 0$ であり, さらに

$$(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$$

で割り切れることを示せ。

(2) $f(x)$ が 4 個の実数根をもつとき, $a \geq 4$ を示せ。

(3) $a = 5$ とする。 $f(x)$ が 4 個の実数根をもつような自然数 b をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

相反多項式の根を逆数の組に分ける。(1) で実根が正であることと逆数も根であることを確認し、(2) では 4 根の積が 1 であることから相加平均・相乗平均を使う。(3) では逆数対ごとの和を α, β と置き、係数条件と $\alpha, \beta \geq 2$ を組み合わせる。

【解答】

(1) $f(0) = 1$ だから $c \neq 0$ である。 $f(c) = 0$ を c^2 で割ると

$$c^2 + \frac{1}{c^2} - a \left(c + \frac{1}{c} \right) + b = 0$$

を得る。もし $c < 0$ なら、左辺の 3 項はすべて正となって矛盾する。よって $c > 0$ である。さらに

$$f\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{f(c)}{c^4} = 0$$

だから $1/c$ も根であり、 $f(x)$ は $(x - c)(x - 1/c)$ で割り切れる。

(2) (1) から 4 個の実根 s, t, u, v はすべて正である。解と係数の関係より

$$s + t + u + v = a, \quad stuv = 1$$

だから、相加平均・相乗平均より

$$a = s + t + u + v \geq 4\sqrt[4]{stuv} = 4$$

となる。

(3) 4 個の根を $r, 1/r, s, 1/s$ と書き、

$$\alpha = r + \frac{1}{r}, \quad \beta = s + \frac{1}{s}$$

と置く。 $\alpha, \beta \geq 2$ であり、

$$f(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$$

だから、係数比較により

$$\alpha + \beta = 5, \quad b = \alpha\beta + 2$$

を得る。 $\alpha, \beta \geq 2$ かつ和が 5 なので

$$6 \leq \alpha\beta \leq \frac{25}{4}, \quad 8 \leq b \leq \frac{33}{4}$$

である。自然数 b は 8 に限られる。実際、

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = (x-1)^2(x^2 - 3x + 1)$$

は 4 個の実根をもつ。したがって $b = 8$ である。

▶ 解法 2

【方針】

多項式を x^2 で割り、 $z = x + 1/x$ によって四次方程式を二次方程式へ落とす。実数根に対応する条件 $z \geq 2$ を一貫して使えば、3 つの設問を同じ見方で処理できる。

【解答】

(1) $f(c) = 0$ なら $c \neq 0$ であり、 $z = c + 1/c$ と置いて

$$z^2 - az + b - 2 = 0$$

を得る。もし $c < 0$ なら $z \leq -2$ であるが、 $a, b > 0$ より

$$z^2 - az + b - 2 \geq 4 + 2a + b - 2 > 0$$

となって矛盾する。よって $c > 0$ である。また c と $1/c$ は同じ z に対応するので、 $1/c$ も根である。

(2) 4 個の実根は (1) により正であり、その積は定数項から 1 である。したがって

$$a = s + t + u + v \geq 4\sqrt[4]{stuv} = 4$$

である。

(3) $x \neq 0$ として $f(x) = 0$ を x^2 で割ると

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

となる。すなわち $z = x + 1/x$ は

$$z^2 - 5z + b - 2 = 0$$

を満たす。この二次方程式の 2 根を α, β とする。各 z から $x^2 - zx + 1 = 0$ の実根が 2 個ずつ得られるための必要十分条件は $\alpha, \beta \geq 2$ である。解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = b - 2$$

であり、よって

$$6 \leq b - 2 \leq \frac{25}{4}$$

となる。自然数は $b = 8$ のみで、実際には

$$f(x) = (x-1)^2(x^2 - 3x + 1)$$

と因数分解できる。ゆえに $b = 8$ である。

【総評】 相反多項式の対称性を、根の正値性・逆数対・係数条件へつなぐ問題である。目安時間は 25～30 分。(1) で負の根を除く根拠を符号まで書くこと、(3) で $z = x + 1/x$ に対応する実数条件が $z \geq 2$ であることが要点になる。 $b = 8$ を絞った後は、実際の因数分解まで示して十分性を確認する。解法 1 は根の組を直接見る方法、解法 2 は四次式全体を二次式へ圧縮する方法であり、同じ相反性を異なる粒度で捉えている。

【第 3 問】

2 つの関数

$$f(t) = 2 \sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$$

によって表される曲線

$$C: \quad x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) $f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) $0 \leq t_1 < t_2 \leq \pi/2$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ とする。このとき

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$$

を示せ。

(3) 曲線 C と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $f'(t)$ 、 $g'(t)$ の符号変化を端点も含めて調べる。(2) は $s = \sin t$ と置き、 $f(t_1) = f(t_2)$ から $s_1 + s_2 = 1$ を得て、 $g(t)^2$ を s の式に直す。(3) は図と (2) で上下関係を確認し、面積を

$$S = - \int_0^{\pi/2} \{f(t) - 1\} g'(t) dt$$

として直接計算する。

【解答】

(1)

$$f'(t) = 2 \cos t (1 - 2 \sin t)$$

であり、 $0 \leq t \leq \pi/2$ では $t = \pi/6$ で増加から減少へ変わる。したがって

$$\max f(t) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

である。また

$$g'(t) = 2(1 + \sin t)(1 - 2 \sin t)$$

も同じ点で符号が正から負へ変わるので、

$$\max g(t) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

(2) $s_i = \sin t_i$ と置く。 $t_1 < t_2$ より $s_1 < s_2$ である。また

$$f(t) = 1 + 2s - 2s^2$$

だから、 $f(t_1) = f(t_2)$ より

$$2(s_1 - s_2)(1 - s_1 - s_2) = 0$$

となり、 $s_1 + s_2 = 1$ を得る。一方、

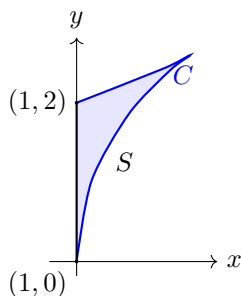
$$g(t)^2 = 4(1 - s)(1 + s)^3$$

であるから、 $s_2 = 1 - s_1$ を代入すると

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = -4(2s_1 - 1)^3$$

となる。 $s_1 < s_2$ かつ和が 1 なので $2s_1 - 1 < 0$ であり、求める差は正である。

(3) $t = 0, \pi/2$ で $x = f(t) = 1$ となる。(2) により、同じ横座標に対応する 2 点では小さい t の点为上側にある。曲線と領域の位置関係は次の通りである。



したがって面積は

$$S = - \int_0^{\pi/2} \{f(t) - 1\}g'(t) dt$$

である。被積分関数を整理すると

$$-\{f(t) - 1\}g'(t) = -8\sin^4 t + 4\sin^3 t + 8\sin^2 t - 4\sin t$$

となる。さらに

$$\int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}$$

だから

$$S = -8 \cdot \frac{3\pi}{16} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{\pi}{4} - 4 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

$s = \sin t$ により (1)(2) の代数構造を整理する。(3) では面積積分を展開せず、部分積分で $f'(t)g(t)$ の積分へ移して計算を短くする。

【解答】

(1) $s = \sin t$ と置くと $0 \leq s \leq 1$ であり、

$$f(t) = 1 + 2s - 2s^2 = \frac{3}{2} - 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2$$

だから最大値は $3/2$ である。また

$$g'(t) = 2(1+s)(1-2s)$$

より g は $s = 1/2$ 、すなわち $t = \pi/6$ で最大となり、その値は $3\sqrt{3}/2$ である。

(2) $s_i = \sin t_i$ とする。 $f(t_1) = f(t_2)$ を平方完成した式に適用し、 $s_1 < s_2$ を使うと $s_1 + s_2 = 1$ である。また

$$g(t)^2 = 4(1-s)(1+s)^3$$

なので

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = -4(2s_1 - 1)^3 > 0$$

を得る。

(3) 面積は

$$S = - \int_0^{\pi/2} \{f(t) - 1\}g'(t) dt$$

である。端点では $f(t) - 1 = 0$ だから、部分積分により

$$S = \int_0^{\pi/2} f'(t)g(t) dt$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f'(t)g(t) &= 4 \cos^2 t (1 - 2 \sin t)(1 + \sin t) \\ &= 4(1 - \sin t - 3 \sin^2 t + \sin^3 t + 2 \sin^4 t) \end{aligned}$$

である。したがって

$$S = 4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

を得る。

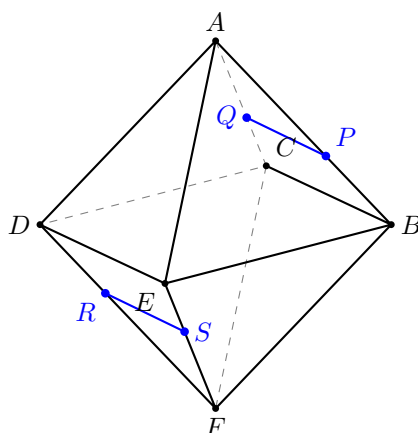
【総評】 媒介変数曲線の最大値、同じ横座標に対する上下関係、面積を順に結ぶ問題である。目安時間は 26～32 分。(2) は独立した不等式ではなく、(3) で曲線の上側・下側と積分の向きを保証するために置かれている。図で $x = 1$ と曲線の位置を確認してから、符号を含めて面積積分を立てたい。解法 1 は被積分関数を直接展開し、解法 2 は端点項が消えることを利用して部分積分する。後者は計算量を減らせるが、 $f'(t)g(t)$ の展開を丁寧に検算する必要がある。

【第 4 問】

座標空間に 6 点

$$\begin{aligned} A(0, 0, 1), \quad B(1, 0, 0), \quad C(0, 1, 0), \\ D(-1, 0, 0), \quad E(0, -1, 0), \quad F(0, 0, -1) \end{aligned}$$

を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある。 $0 < s < 1$ 、 $0 < t < 1$ とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q 、線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L 、線分 RS の中点を M とする。 s, t が与えられた範囲を動くとき、線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 4 点 P, Q, R, S を通る平面による正八面体の切り口の面積を X とする。 $LM = m$ のとき、 X を最大にする s, t と、そのときの X を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

内分点の座標を求め、 $PQ \parallel RS$ から同一平面性を示す。 LM^2 は $s+t$ だけの二次式になる。最小条件 $s+t = 2/3$ の下で切断面を $x+y-2z=k$ と表し、正八面体の各辺との交点を求めて射影面積を計算する。

【解答】

(1) 内分公式より

$$\begin{aligned} P &= (1-s, 0, s), \quad Q = (0, 1-s, s), \\ R &= (t-1, 0, -t), \quad S = (0, t-1, -t) \end{aligned}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} = (-(1-s), 1-s, 0), \quad \overrightarrow{RS} = (1-t, -(1-t), 0)$$

であり、

$$\overrightarrow{RS} = -\frac{1-t}{1-s}\overrightarrow{PQ}$$

となる。よって $PQ \parallel RS$ であり、この 2 直線を含む平面上に P, Q, R, S がある。

(2) 中点の座標は

$$L = \left(\frac{1-s}{2}, \frac{1-s}{2}, s \right), \quad M = \left(\frac{t-1}{2}, \frac{t-1}{2}, -t \right)$$

である。 $u = s + t$ と置くと

$$\begin{aligned} LM^2 &= \frac{(u-2)^2}{2} + u^2 \\ &= \frac{3}{2} \left(u - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。 $0 < u < 2$ だから $u = 2/3$ で最小となり、

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad s + t = \frac{2}{3}$$

を得る。

(3) $s + t = 2/3$ の下で、4 点を通る平面は

$$x + y - 2z = k, \quad k = 1 - 3s = \frac{3}{2}(t - s)$$

と表せる。 $0 < s, t < 1$ から $-1 < k < 1$ である。正八面体は

$$|x| + |y| + |z| \leq 1$$

で表される。

まず $0 \leq k < 1$ とする。切断面の頂点を順に並べると

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(-\frac{1-k}{2}, \frac{1+k}{2}, 0 \right), & V_2 &= \left(0, \frac{k+2}{3}, \frac{1-k}{3} \right), \\ V_3 &= \left(\frac{k+2}{3}, 0, \frac{1-k}{3} \right), & V_4 &= \left(\frac{1+k}{2}, -\frac{1-k}{2}, 0 \right), \\ V_5 &= \left(0, -\frac{2-k}{3}, -\frac{1+k}{3} \right), & V_6 &= \left(-\frac{2-k}{3}, 0, -\frac{1+k}{3} \right) \end{aligned}$$

である。これを xy 平面へ射影し、靴紐公式を使うと射影面積は

$$A_{xy} = \frac{2(5-k^2)}{9}$$

となる。平面の法線ベクトルは $(1, 1, -2)$ なので、面積比から

$$X = \frac{\sqrt{6}}{2} A_{xy} = \frac{\sqrt{6}}{9} (5 - k^2)$$

を得る。 $k < 0$ の場合も原点对称性により同じ式が成り立つ。

よって X は $k = 0$ のとき最大である。これは $s = t$ を意味し、 $s + t = 2/3$ と合わせて

$$s = t = \frac{1}{3}, \quad X_{\max} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

となる。

▶ 解法 2

【方針】

(1) では 4 点が満たす平面方程式を直接作る。(2) は $u = s + t$ で平方完成する。(3) は

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

へ座標変換し、断面を uv 平面上の縦切り積分で求める。頂点を 6 個列挙せずに面積式へ到達できる。

【解答】

(1) 4 点の座標は解法 1 と同じである。平面

$$(s+t)(x+y) + (s+t-2)z = t-s$$

を考える。 P, Q では左辺が $t-s$ となり、 R, S でも同じ値になる。したがって 4 点はこの一つの平面上にある。

(2) $u = s + t$ と置くと

$$LM^2 = \frac{3}{2}u^2 - 2u + 2 = \frac{3}{2}\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

である。よって

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

であり、等号条件は $s+t = 2/3$ である。

(3) 等号条件の下で平面を

$$x + y - 2z = k, \quad k = 1 - 3s = \frac{3}{2}(t - s)$$

と書く。原点对称性から $0 \leq k < 1$ の場合を調べればよい。ここで

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad z = \frac{u - k}{2}$$

と置く。恒等式

$$|x| + |y| = \max\{|u|, |v|\}$$

により、正八面体との共通部分は

$$\max\{|u|, |v|\} + \frac{|u - k|}{2} \leq 1$$

となる。固定した u に対して

$$|v| \leq 1 - \frac{|u - k|}{2}$$

であり、この右辺が $|u|$ 以上になる u の範囲は

$$\frac{k-2}{3} \leq u \leq \frac{k+2}{3}$$

である。したがって uv 平面上の面積は

$$\begin{aligned} A_{uv} &= \int_{(k-2)/3}^{(k+2)/3} (2 - |u - k|) du \\ &= \frac{4(5 - k^2)}{9} \end{aligned}$$

となる。

切断面の位置ベクトルを

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, \frac{u-k}{2} \right)$$

とすると

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

だから、

$$X = \frac{\sqrt{6}}{4} A_{uv} = \frac{\sqrt{6}}{9} (5 - k^2)$$

である。最大値は $k = 0$ で得られるため、

$$s = t = \frac{1}{3}, \quad X_{\max} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

となる。

【総評】 正八面体の断面を、座標・最短距離・面積最適化へつなぐ総合問題である。目安時間は 35 分前後。(3) で求めるのは四角形 $PQRS$ の面積ではなく、平面が正八面体から切り取る断面全体の面積である点が最大の注意点になる。まず LM の最小条件で自由度を $s + t = 2/3$ に落とし、残る差 $t - s$ を平面の位置 k として扱うと見通しがよい。解法 1 は断面六角形の頂点と射影を使う具体的な方法、解法 2 は座標変換と縦切り積分による構造的な方法である。図・平面方程式・面積倍率の 3 段階を対応させて検算したい。

【第 5 問】

$0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ とし、2 つのチーム A、B が引き分けなしで n 回の試合を行う。第 1 試合で A が勝つ確率は p である。A が勝った直後の試合で A が勝つ確率は p 、B が勝った直後の試合で A が勝つ確率は q である。

(1) 第 n 試合で A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n \geq 3$ とする。B が連勝せず、かつちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は直前の勝者で場合分けして一次漸化式を立て、定数解を引く。(2) は B が勝つ 2 試合の位置 $i < j$ を選ぶ。最後の B 勝ちが第 n 試合かどうかで、その直後に必要な A 勝ちの確率 q の個数が変わるため分けて数える。

【解答】

(1) 第 n 試合で A が勝つ確率を a_n とする。直前の勝者で分けると

$$a_{n+1} = pa_n + q(1 - a_n) = q + (p - q)a_n$$

である。定数解

$$\alpha = \frac{q}{1 - p + q}$$

を引けば

$$a_{n+1} - \alpha = (p - q)(a_n - \alpha)$$

となる。 $a_1 = p$ だから

$$a_n = \frac{q}{1 - p + q} + \left(p - \frac{q}{1 - p + q}\right)(p - q)^{n-1}$$

である。

(2) B が勝つ 2 試合を第 i 試合、第 j 試合とする。 $i < j$ とすれば、連勝しない条件は $j \geq i + 2$ である。

まず $j < n$ の場合、2 回の B 勝ちの直後はいずれも A 勝ちでなければならない。各配置の確率は

$$(1 - p)^2 q^2 p^{n-4}$$

である。条件を満たす配置数は

$$\sum_{i=1}^{n-3} (n - i - 2) = 1 + 2 + \cdots + (n - 3) = \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$$

である。

次に $j = n$ の場合、最後の B 勝ちの後には試合がないため、 q は 1 個だけ現れる。各配置の確率は

$$(1 - p)^2 qp^{n-3}$$

であり、 $i = 1, 2, \dots, n - 2$ の $n - 2$ 通りがある。したがって

$$b_n = \frac{(n - 2)(n - 3)}{2} (1 - p)^2 q^2 p^{n-4} + (n - 2)(1 - p)^2 qp^{n-3}$$

である。 $n = 3$ でも第 1 項は 0 となり、この式をそのまま使える。

▶ 解法 2

【方針】

B の勝数と直前の勝者を同時に状態として持つ。ちょうど r 勝して直前が A または B である確率を分けた漸化式を作れば、位置を直接列挙せずに (2) の式が導ける。

【解答】

(1) 状態 A、B の確率ベクトルを使うと

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 - a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 - p & 1 - q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$$

である。第 1 成分から

$$a_{n+1} = q + (p - q)a_n$$

を得るので、定常値 $q/(1 - p + q)$ を引いて

$$a_n = \frac{q}{1 - p + q} + \left(p - \frac{q}{1 - p + q}\right)(p - q)^{n-1}$$

となる。

(2) 第 k 試合までに B がちょうど r 勝し、かつ第 k 試合の勝者が A、B である確率をそれぞれ

$$A_k^{(r)}, \quad B_k^{(r)}$$

とする。ただし B の連勝を含む列は数えない。このとき

$$A_{k+1}^{(r)} = pA_k^{(r)} + qB_k^{(r)}, \quad B_{k+1}^{(r)} = (1 - p)A_k^{(r-1)}$$

である。初期条件 $A_1^{(0)} = p$ 、 $B_1^{(1)} = 1 - p$ から

$$A_k^{(0)} = p^k, \quad B_k^{(1)} = (1 - p)p^{k-1}, \quad A_k^{(1)} = (k - 1)(1 - p)qp^{k-2}$$

を得る。よって

$$B_n^{(2)} = (1 - p)A_{n-1}^{(1)} = (n - 2)(1 - p)^2qp^{n-3}$$

である。また漸化式

$$A_n^{(2)} = pA_{n-1}^{(2)} + qB_{n-1}^{(2)}$$

に上式を代入し、 $A_3^{(2)} = 0$ から帰納すると

$$A_n^{(2)} = \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}(1 - p)^2q^2p^{n-4}$$

となる。求める確率は直前の勝者を問わないので

$$\begin{aligned} b_n &= A_n^{(2)} + B_n^{(2)} \\ &= \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}(1 - p)^2q^2p^{n-4} + (n - 2)(1 - p)^2qp^{n-3} \end{aligned}$$

である。

【総評】 推移確率をもつ勝敗列を、一次漸化式と制約付きの数え上げで処理する問題である。目安時間は 25～30 分。(1) は初項 $a_1 = p$ と定常値を明記する。(2) では「B がちょうど 2 勝」と「B が連勝しない」を同時に管理し、最後の試合が B 勝ちの場合だけ直後の A 勝ちが存在しないことに注意する。解法 1 は B 勝ちの位置を直接選ぶため見通しがよく、解法 2 は勝数と直前の勝者を状態に持つため、勝数を 3 回以上に拡張するときにも使える。最終式は $n = 3$ の端の場合でも確かめておきたい。