

大阪大学 2019 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

以下の問いに答えよ。ただし、 $\log$ は自然対数、 e はその底とする。

- (1) b を実数とする。関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ。

- (2) $a \leq b$ を満たす正の実数 a, b に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2 + 1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2 + 1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b - a)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$$

を求めよ。ただし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$$

を用いてもよい。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は積分の下端微分と積の微分をまとめる。(2) の下側は (1) の単調性、上側は被積分関数の最大値から示す。(3) では $u = \sqrt{n}t$ と変数変換し、(2) をそのまま適用して指数の主要項を挟む。

【解答】

- (1) 微分すると

$$\frac{d}{dx} \int_x^b e^{-t^2/2} dt = -e^{-x^2/2}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2 + 1} e^{-x^2/2} \right) &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} e^{-x^2/2} - \frac{x^2}{x^2 + 1} e^{-x^2/2} \\ &= \frac{1 - 2x^2 - x^4}{(x^2 + 1)^2} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

だから

$$f'(x) = -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} e^{-x^2/2} < 0$$

である。よって f は単調に減少する。

- (2) $a \leq b$ より $f(a) \geq f(b)$ である。これを展開すると

$$\frac{a}{a^2 + 1} e^{-a^2/2} - \frac{b}{b^2 + 1} e^{-b^2/2} \leq \int_a^b e^{-t^2/2} dt$$

を得る。

一方、 $a \leq t \leq b$ かつ $a > 0$ なので

$$e^{-t^2/2} \leq e^{-a^2/2}$$

である。したがって

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt \leq \int_a^b e^{-a^2/2} dt = e^{-a^2/2}(b-a)$$

となる。

(3) $u = \sqrt{n}t$ と変数変換すると

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$$

である。(2) で $a = \sqrt{n}, b = 2\sqrt{n}$ とすれば

$$I_n \leq e^{-n/2}$$

であり、また

$$\begin{aligned} I_n &\geq \frac{e^{-n/2}}{n+1} - \frac{2e^{-2n}}{4n+1} \\ &= \frac{e^{-n/2}}{n+1} \left\{ 1 - \frac{2(n+1)}{4n+1} e^{-3n/2} \right\} \end{aligned}$$

である。 $n \geq 1$ では括弧内は $1/2$ より大きいので

$$\frac{e^{-n/2}}{2(n+1)} < I_n \leq e^{-n/2}$$

となる。対数を取り n で割ると

$$-\frac{1}{2} - \frac{\log\{2(n+1)\}}{n} < \frac{1}{n} \log I_n \leq -\frac{1}{2}$$

である。よって、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n = -\frac{1}{2}$$

を得る。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は導関数の符号と被積分関数の単調性で確認する。(3) は設問 (2) を使わず、積分区間全体での上界と、左端に接する長さ $1/n$ の短区間での下界を作る。

【解答】

(1) 解法 1 と同じ微分計算により

$$f'(x) = -\frac{2e^{-x^2/2}}{(x^2+1)^2} < 0$$

であるから、 f は単調に減少する。

(2) 下側の不等式は $f(a) \geq f(b)$ を整理すれば得られる。上側は、 $e^{-t^2/2}$ が正の範囲で減少するので

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt \leq e^{-a^2/2}(b-a)$$

である。

(3) $1 \leq t \leq 2$ では

$$e^{-nt^2/2} \leq e^{-n/2}$$

だから

$$I_n \leq e^{-n/2}$$

である。

一方、 $1 \leq t \leq 1 + 1/n$ では

$$t^2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

なので

$$\begin{aligned} I_n &\geq \int_1^{1+1/n} e^{-nt^2/2} dt \\ &\geq \frac{1}{n} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

である。よって

$$-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{\log n}{n} \leq \frac{1}{n} \log I_n \leq -\frac{1}{2}$$

となる。両端は $-1/2$ に収束するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n = -\frac{1}{2}$$

である。

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。(1) では積分の下端微分と積の微分の符号を正確に処理する。(3) は、設問 (2) を使う変数変換法と、左端付近の短区間を使う直接評価の両方で指数の主要項が $-n/2$ であることを確認できる。積分を含む主要式はすべて別行に置き、対数を取る前に下界が正であることも明示した。

【第 2 問】

自然数 a, b に対し、

$$w = \cos \frac{a\pi}{3+b} + i \sin \frac{a\pi}{3+b}$$

とおく。ただし、 i は虚数単位とする。複素数 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下のように定める。

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 4, b = 3$ のとき、複素数平面上の点 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。
- (2) $a = 2, b = 1$ のとき、 z_{63} を求めよ。
- (3) さいころを 2 回投げ、1 回目に出た目を a 、2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

特性方程式を因数分解し、 $w \neq -1$ の一般項を求める。 $w = -1$ は重解になるため別に扱う。(1) は 7 点を計算して正六角形を描き、(3) は $w^{63} = -1$ を満たす出目を表で数えて例外を除く。

【解答】

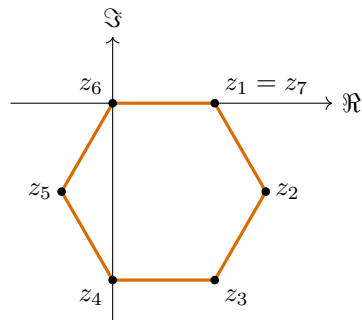
(1) $a = 4, b = 3$ のとき

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。漸化式から

n	z_n
1	1
2	$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3	$1 - \sqrt{3}i$
4	$-\sqrt{3}i$
5	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
6	0
7	1

を得る。



したがって、できる図形は正六角形である。

(2) 特性方程式は

$$r^2 - (1-w)r - w = (r-1)(r+w) = 0$$

である。 $w \neq -1$ のとき、初期条件から

$$z_n = \frac{1 - (-w)^n}{1 + w}$$

を得る。 $a = 2, b = 1$ では $w = i$ なので

$$\begin{aligned} z_{63} &= \frac{1 - (-i)^{63}}{1 + i} \\ &= \frac{1 - i}{1 + i} = -i \end{aligned}$$

である。

(3) まず $w \neq -1$ とする。一般項から

$$z_{63} = 0 \iff (-w)^{63} = 1 \iff w^{63} = -1$$

である。よって

$$\frac{63a}{b+3} \text{ が奇数}$$

であればよい。 $1 \leq a, b \leq 6$ で候補を整理すると

b	a
1	4
2	5
3	2, 6
4	1, 3, 5
5	なし
6	1, 3, 5

となり、全部で 10 組である。

ただし $(a, b) = (4, 1), (5, 2), (6, 3)$ では $w = -1$ である。この場合は

$$z_n = 2z_{n-1} - z_{n-2}, \quad z_1 = 1, z_2 = 2$$

より $z_n = n$ となるため除く。したがって有効な出目は 7 組で、確率は

$$\frac{7}{36}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

階差 $d_n = z_n - z_{n-1}$ を取ると、1 次の等比数列になる。これを和に戻して一般項を得る。(1) では辺ベクトルの長さと回転角から正六角形を示し、(2)(3) は等比和の式へ直接代入する。

【解答】

(1)

$$d_n = z_n - z_{n-1}$$

とおくと、漸化式から

$$\begin{aligned} d_n &= -w(z_{n-1} - z_{n-2}) \\ &= -wd_{n-1} \end{aligned}$$

である。 $d_2 = -w$ だから

$$d_n = (-w)^{n-1}$$

となる。 $a = 4, b = 3$ では

$$-w = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

である。したがって各辺 $d_2, d_3, \dots, d_7$ は長さ 1 で、直前の辺から $-\pi/3$ ずつ回転する。6 辺の和は 0 だから、解法 1 の図の正六角形が得られる。

(2) $w \neq -1$ なら

$$\begin{aligned} z_n &= z_1 + \sum_{k=2}^n d_k \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-w)^j \\ &= \frac{1 - (-w)^n}{1 + w} \end{aligned}$$

である。 $w = i$ を代入すると

$$z_{63} = \frac{1 - i}{1 + i} = -i$$

となる。

(3) $w \neq -1$ では

$$z_{63} = 0 \iff w^{63} = -1$$

である。これを出目 36 組について調べると、解法 1 の表にある 10 組を得る。そのうち $w = -1$ となる 3 組では、階差が

$$d_n = d_{n-1} = 1$$

となり $z_n = n$ だから条件を満たさない。よって確率は

$$\frac{10 - 3}{36} = \frac{7}{36}$$

である。

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。特性方程式でも階差でも一般項を得られるが、 $w = -1$ では分母 $1 + w$ が 0 になるため例外処理が必須である。(1) は辺ベクトルが一定角だけ回転することを図と結び付ける。(3) は候補 10 組を表で明示し、 $w = -1$ の 3 組を除いて 7 組とする。

【第 3 問】

実数 s, t が $s^2 + t^2 \leq 6$ を満たしながら変わるとき, xy 平面上で点 $(s+t, st)$ が動く領域を A とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ.
- (2) A を図示せよ.
- (3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$x = s+t, y = st$ とおき, s, t を 2 次方程式の 2 根と見る. 判別式と $s^2 + t^2$ の条件から 2 本の放物線に挟まれた領域を得る. 体積は垂直断面の外半径・内半径が変わる $x = 2, \sqrt{6}$ で区切る.

【解答】

- (1) $(s+t, st) = (2, \sqrt{2})$ なら, s, t は

$$X^2 - 2X + \sqrt{2} = 0$$

の実数解でなければならない. しかし判別式は

$$4 - 4\sqrt{2} < 0$$

である. よって $(2, \sqrt{2})$ は A の点ではない.

- (2) $x = s+t, y = st$ とおく. s, t が実数である条件は

$$x^2 - 4y \geq 0, \quad y \leq \frac{x^2}{4}$$

である. また

$$s^2 + t^2 = x^2 - 2y \leq 6$$

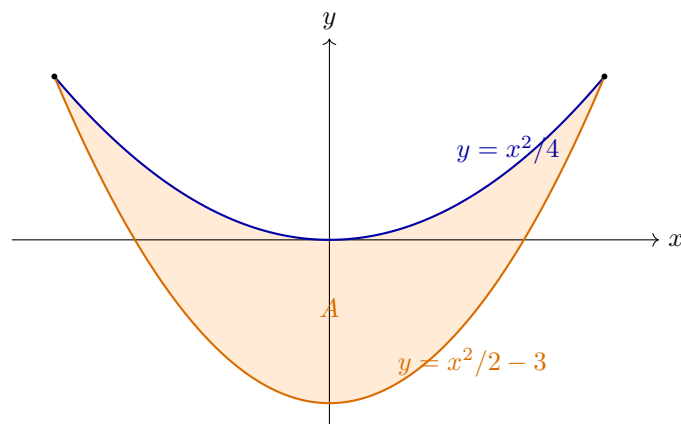
より

$$y \geq \frac{x^2}{2} - 3$$

である. 両立条件から $x^2 \leq 12$ も得る. したがって

$$A = \left\{ (x, y) \mid -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}, \frac{x^2}{2} - 3 \leq y \leq \frac{x^2}{4} \right\}$$

である.



- (3)

$$U = \frac{x^2}{4}, \quad L = \frac{x^2}{2} - 3$$

とおく. 対称性により $x \geq 0$ の体積を 2 倍する.

$0 \leq x \leq 2$ では外半径が $-L$ 、 $2 \leq x \leq \sqrt{6}$ では外半径が U である。 $\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{3}$ では外半径 U 、内半径 L の輪になる。よって

$$V = 2\pi \left\{ \int_0^2 \left(3 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx + \int_2^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^2 \right] dx \right\}$$

である。各積分は

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(3 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx &= \frac{58}{5}, \\ \int_2^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx &= \frac{9\sqrt{6} - 8}{20}, \\ \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^2 \right] dx &= \frac{87\sqrt{6}}{20} - \frac{24\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

だから

$$V = \frac{16\pi}{5} (7 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3})$$

となる。

▶ 解法 2

【方針】

s, t を 45 度回転した座標へ移して領域を直接求める。体積は水平な円筒殻で計算し、半径 r において正側・負側の水平切片が重なるかどうかを $r = 1$ で分ける。

【解答】

(1) $s + t = 2, st = \sqrt{2}$ を満たす実数 s, t が存在するには

$$X^2 - 2X + \sqrt{2} = 0$$

が実数解をもつ必要があるが、判別式が負なので存在しない。

(2)

$$u = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{s-t}{\sqrt{2}}$$

とおくと

$$u^2 + v^2 = s^2 + t^2 \leq 6$$

である。また

$$x = \sqrt{2}u, \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2}$$

となる。 $u = x/\sqrt{2}$ を固定すると

$$0 \leq v^2 \leq 6 - \frac{x^2}{2}$$

だから

$$\frac{x^2}{2} - 3 \leq y \leq \frac{x^2}{4}$$

を得る。右辺が存在する条件は $|x| \leq 2\sqrt{3}$ であり、解法 1 の図の領域になる。

(3) 回転後の半径を $r \geq 0$ とする。高さ $y = -r$ における切片は

$$|x| \leq \sqrt{6 - 2r}$$

であり、高さ $y = r$ における切片は

$$2\sqrt{r} \leq |x| \leq \sqrt{6 + 2r}$$

である。 $0 \leq r \leq 1$ では両者が重なり、回転後の x 方向の長さは

$$2\sqrt{6 + 2r}$$

となる。 $1 \leq r \leq 3$ では間に隙間があり、長さは

$$2(\sqrt{6-2r} + \sqrt{6+2r} - 2\sqrt{r})$$

である。

したがって円筒殻法により

$$V = 4\pi \left\{ \int_0^1 r\sqrt{6+2r} dr + \int_1^3 r(\sqrt{6-2r} + \sqrt{6+2r} - 2\sqrt{r}) dr \right\}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \int r\sqrt{6+2r} dr &= \frac{(6+2r)^{5/2}}{10} - (6+2r)^{3/2}, \\ \int r\sqrt{6-2r} dr &= \frac{(6-2r)^{5/2}}{10} - (6-2r)^{3/2} \end{aligned}$$

を用いて代入すると

$$\begin{aligned} \frac{V}{4\pi} &= \frac{24\sqrt{3} + 12\sqrt{6}}{5} + \frac{24}{5} - \frac{36\sqrt{3} - 4}{5} \\ &= \frac{4}{5}(7 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$V = \frac{16\pi}{5}(7 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3})$$

である。

【総評】 難度 8、目安時間 32 分。領域は、2 次方程式の判別式または 45 度回転した (u, v) 座標で求められる。垂直断面法では $x = 2, \sqrt{6}$ 、水平円筒殻法では半径 $r = 1$ が切替点になる。2 種類の積分が同じ体積へ到達するため、区間分けと計算の強い独立検算になる。

【第 4 問】

下の図は、 $\frac{1}{1}$ から始めて分数 $\frac{p}{q}$ の左下に分数 $\frac{p}{p+q}$ 、右下に分数 $\frac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。このとき以下の問いに答えよ。

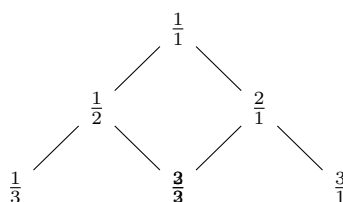
- (1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\frac{n}{1}$ は既約分数とみなす。
- (2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。
- (3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。
- (4) $\frac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば、 $\frac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。

▶ 解法 1

【方針】

子へ進む操作で最大公約数が保存されることを示す。任意の既約分数からは、大きい方から小さい方を引く逆操作で根へ戻り、分子分母の和が減ることから有限性を示す。逆操作の一意性で重複も否定し、(4) は左右の道を 2 進数へ変換する。

【解答】



(1) p/q が既約なら

$$\gcd(p, p+q) = \gcd(p, q) = 1, \quad \gcd(p+q, q) = \gcd(p, q) = 1$$

である。根 $1/1$ は既約なので、帰納的にすべて既約である。

(2) 正の既約分数 $p/q \neq 1/1$ から親へ戻る操作を考える。

$$\frac{p}{q} \mapsto \begin{cases} \frac{p}{q-p} & (p < q), \\ \frac{p-q}{q} & (p > q) \end{cases}$$

である。既約なので $p = q$ は $1/1$ 以外では起こらない。この操作で分子分母の和は必ず減るから、有限回で $1/1$ に到達する。道を逆にたどれば、任意の正の有理数が樹形図に現れる。

(3) 親は $p < q$ なら左上、 $p > q$ なら右上と一意に決まる。したがって根までの道も一意であり、同じ有理数が異なる 2 か所に現れることはない。

(4) 逆向きにたどると

$$\frac{19}{44} \rightarrow \frac{19}{25} \rightarrow \frac{19}{6} \rightarrow \frac{13}{6} \rightarrow \frac{7}{6} \rightarrow \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{1}$$

である。矢印は 10 本なので 11 段目である。根からの道は

$$L, L, L, L, L, R, R, R, L, L$$

である。左を 0、右を 1 とすれば 0000011100 で、10 進数では 28 である。左端を 1 番目と数えるので

$$28 + 1 = 29$$

となる。よって 11 段目の左から 29 番目である。

▶ 解法 2

【方針】

分数を正の整数の組 (p, q) と見て、左操作 $L(p, q) = (p, p+q)$ 、右操作 $R(p, q) = (p+q, q)$ を扱う。逆向きの引き算算法で存在・一意性を同時に示し、(4) ではユークリッドの互除法の商で同じ向きの移動をまとめて求める。

【解答】

(1) 左操作と右操作は

$$L(p, q) = (p, p+q), \quad R(p, q) = (p+q, q)$$

である。どちらも 2 成分の最大公約数を変えない。始点 $(1, 1)$ の最大公約数は 1 だから、現れる組はすべて互いに素である。

(2) 互いに素な正整数の組 (p, q) に対して、大きい成分から小さい成分を引く。この操作は成分を正に保ち、和を減らす。したがって有限回で等しい 2 成分に到達し、互いに素なのでその組は $(1, 1)$ である。各引き算を逆にすれば L または R となるため、すべての正の有理数が現れる。

(3) $p < q$ なら最後の操作は必ず L 、 $p > q$ なら必ず R である。したがって逆向きの各段階が一意で、根からの語 L, R も一意になる。よって重複はない。

(4) 互除法の商を使うと、逆向きの同じ操作をまとめられる。

$$44 = 2 \cdot 19 + 6, \quad 19 = 3 \cdot 6 + 1, \quad 6 = 6 \cdot 1$$

より、 $(19, 44)$ から根へ戻る道は

$$L^2 R^3 L^5$$

である。逆順にして根からの道は

$$L^5 R^3 L^2$$

となり、移動は 10 回なので 11 段目である。

ある段で左から k 番目の点の左の子は次の段の $2k-1$ 番目、右の子は $2k$ 番目である。 $k=1$ から上の道を進むと

$$1 \xrightarrow{L^5} 1 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{R} 4 \xrightarrow{R} 8 \xrightarrow{L} 15 \xrightarrow{L} 29$$

となる。よって 11 段目の左から 29 番目である。

【総評】 難度 7、目安時間 25 分。最大公約数の保存、分子分母の和の減少、親の一意性が (1)～(3) を貫く。図を正整数組の左右操作として見ると構造が明確になる。(4) は 1 回ずつ逆算する方法と、互除法の商で $L^2 R^3 L^5$ と圧縮する方法の双方で 11 段目・29 番目を確認できる。

【第 5 問】

座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える。 S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が最小となる球面の方程式を求めよ。
- (2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 球面の差から共通円を含む平面を求める。中心線と平面の交点が共通円の中心であり、円の半径も直角三角形から出る。同じ円を通る球の中心は円の軸上にあるので、最小半径と指定半径を幾何的に求める。

【解答】

球面の中心を

$$O_1 = (1, 1, 1), \quad O_2 = (2, 3, 3)$$

とする。2 つの方程式の差から、共通円 C を含む平面は

$$2x + 4y + 4z = 25$$

である。法線 $(1, 2, 2)$ は $\overrightarrow{O_1 O_2}$ と平行なので、この平面は中心線に垂直である。

O_1 から平面までの距離は

$$\frac{|2 + 4 + 4 - 25|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{5}{2}$$

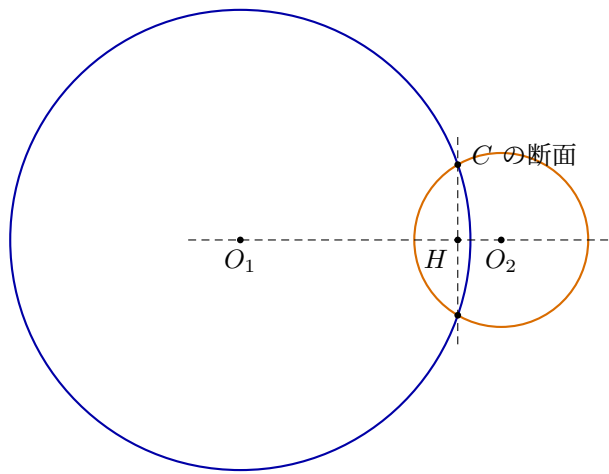
である。よって共通円の半径 ρ は

$$\rho^2 = 7 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

となる。円の中心 H は

$$\begin{aligned} H &= O_1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}(1, 2, 2) \\ &= \left(\frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

である。



中心線を含む断面の模式図

(1) 円 C を通る球の中心は、 H を通り円の平面に垂直な直線上にある。半径が最小なのは中心が H のときで、半径の 2 乗は $3/4$ である。よって

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

である。

(2) 半径が $\sqrt{3}$ なら、球の中心と H の距離は

$$\sqrt{3 - \rho^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

である。軸方向の単位ベクトルは $(1, 2, 2)/3$ だから、中心は

$$H \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}(1, 2, 2)$$

すなわち

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right), \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

である。よって求める 2 球面は

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = 3$$

および

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = 3$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

球面を左辺が 0 の形で $F_1 = 0, F_2 = 0$ と書く。同じ共通円をもつ球面は $F_1 + t(F_2 - F_1) = 0$ と表せるので、中心と半径を t の 2 次式として求め、平方完成する。

【解答】

球面 S_1, S_2 の左辺を 0 に移して、それぞれ F_1, F_2 とする。差は

$$F_2 - F_1 = -2x - 4y - 4z + 25$$

であり、これは共通円 C を含む平面を表す。したがって、同じ共通円をもつ球面族は

$$F_t = F_1 + t(F_2 - F_1) = 0$$

と表せる。係数を比べて平方完成すると、その中心 $K(t)$ と半径 $R(t)$ は

$$K(t) = (1+t, 1+2t, 1+2t),$$

$$R^2(t) = 9t^2 - 15t + 7 = 9\left(t - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

となる。

(1) 半径は $t = 5/6$ のとき最小である。このとき

$$K\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right), \quad R^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

だから、求める球面は

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

である。

(2) $R^2(t) = 3$ を解くと

$$9t^2 - 15t + 4 = 0, \quad t = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{4}{3}$$

である。対応する中心は

$$K\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad K\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

となるので、求める方程式は解法 1 の 2 式である。

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。幾何解法では共通円の中心・半径と円の軸を使う。代数解法では球面束の半径を $9(t - 5/6)^2 + 3/4$ と平方完成することで、最小球と半径 $\sqrt{3}$ の 2 球を同時に検算できる。